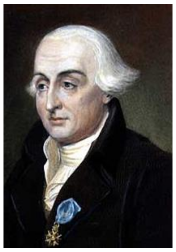
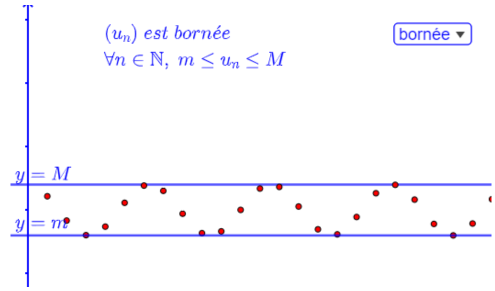


Convergence monotone.

Joseph Louis de Lagrange *(1736 ; 1813) est un mathématicien italien naturalisé français.*
C'est à lui que l'on doit la notation indicielle des suites.

I. Suites majorées, minorées, bornées.



Définition : On dit qu'une suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ est :
☺ majorée s'il existe un réel M tel que pour tout entier $n \in \mathbb{N},\ u_n \leq M$.
☺ minorée s'il existe un réel m tel que pour tout entier $n \in \mathbb{N},\ u_n \geq m$.
☺ bornée si elle est à la fois majorée et minorée.

Exemples :

☺ Les suites de terme général $u_n = \cos(n)$ ou $u_n = (-1)^n$ sont ……………………………………………………….

☺ La suite de terme général $u_n = n^2$ ……………………………………………………………………………………….

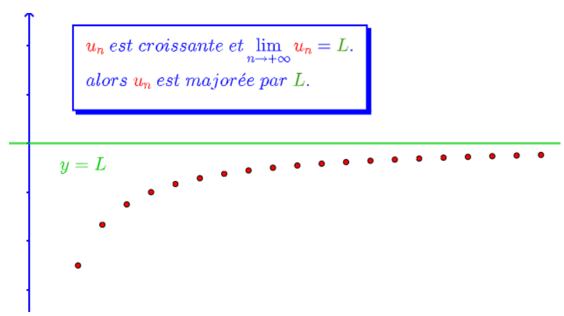
☑ *Savoir-faire : Savoir démontrer qu'une suite est majorée ou minorée :*

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = \frac{1}{3} u_n + 2$ et $u_0 = 2$.

Démontrer par récurrence que la suite (u_n) est majorée par 3.

………
………
………
………
………
………

II. Convergence des suites monotones.



Propriété : Soit (u_n) une suite croissante définie sur $\mathbb{N}$.
Si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l$ alors la suite (u_n) est majorée par l.

Démonstration par l'absurde

………
………
………
………
………
………

Théorème de convergence monotone (admis) :

☺ Si une suite croissante est majorée alors elle est ....

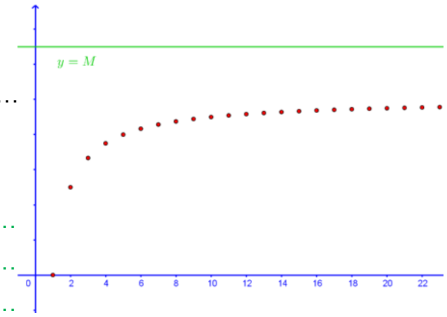
☺ ....

Remarque :

....

....

....



☑ *Savoir-faire : Savoir utiliser le théorème de convergence monotone :*

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = \frac{1}{3}\, u_n + 2$ et $u_0 = 2$.

Démontrer que la suite (u_n) est convergente.

....

....

....

☑ *Savoir-faire : Savoir déterminer une limite après avoir prouver qu'une suite est convergente :*

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = \frac{1}{3}\, u_n + 2$ et $u_0 = 2$.

La suite (u_n) est convergente, détermine sa limite.

....

....

....

Théorème :

Si une suite croissante est non majorée alors elle tend vers $+\infty$.

Démonstration exigible :

....

....

....

....

Théorème :

Si une suite décroissante est non minorée alors elle tend vers $-\infty$.