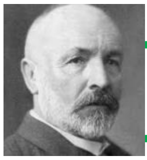
Intervalles de $\mathbb{R}$.



Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor *(1845 ; 1918) mathématicien russe, Il est connu pour être le créateur de la théorie des ensembles.*

I. La droite numérique.

Définition : On appelle droite numérique une droite graduée.

Propriété :
- ♦ Tout nombre réel est l'abscisse d'un unique point de la droite numérique.
- ♦ Á chaque point de la droite numérique correspond un unique nombre réel.

Il y a donc une correspondance parfaite entre l'ensemble des nombres réels et la droite numérique.

☺ Rappel : les nombres constructibles.

Construire $\sqrt{2}$, $\frac{1}{3}$.

II. Intervalles de $\mathbb{R}$.

☺ Intervalles fermés.

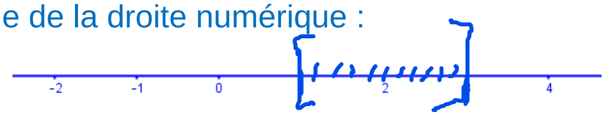
Définition : Soit a et b deux nombres réels tels que $a < b$.
On appelle intervalle fermé de bornes a et b l'ensemble des nombres x qui vérifient $a \leq x \leq b$.
On le note $[\, a\, ;b\,]$.

Vrai ou faux : ♦ -1 $\in [-5\,;4\,]$: $-5 \leq -1 \leq 4$ Donc $-1 \in [-5;4]$

♦ 8 $\in [-4\,;6\,]$: $8 > 6$ Donc $8 \notin [-4;6]$

Remarque : Un intervalle est une partie de l'ensemble des nombres réels, donc on peut le représenter comme une partie de la droite numérique :

Représentation de $[\,1\,;3\,]$:



☺ Intervalles ouverts.

Définition : Soit a et b deux nombres réels tels que $a < b$.
On appelle intervalle ouvert de bornes a et b l'ensemble des nombres x qui vérifient $a < x < b$.
On le note $]\, a\, ;b\, [$.

Vrai ou faux : ♦ -1 $\in\,]-3\,;4\,[$: $-3 < -1 < 4$ Donc $-1 \in\,]-3;4[$

♦ 4 $\in\,]-3\,;4\,[$: $4 \notin\,]-3;4[$

Logique : ♦ Si $x > 2$ alors $x \geq 2$: Vrai car $]2;+\infty[\subset [2;+\infty[$

♦ Si $x \geq 2$ alors $x > 2$: Faux contre exemple $x=2$

Remarque : On peut représenter l'ensemble de tous les réels par un intervalle : $\mathbb{R}=]-\infty;+\infty[$.

Attention : ∞ n'est pas un nombre, c'est une idée. Les crochets sont toujours ouverts.

III. Différentes représentation d'un intervalle.

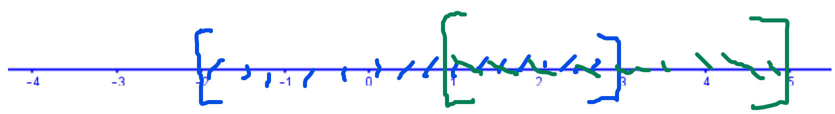
$x \in [2;3]$	$2 \leq x \leq 3$	
$x \in]1;5[$	$1 < x < 5$	
$x \in]1;3]$	$1 < x \leq 3$	
$x \in [1;+\infty[$	$1 \leq x$	
$x \in]-\infty;-2[$	$x < -2$	

IV. Intersection d'intervalles.

Définition : Soit I et J deux intervalles.
On appelle intersection de I et de J l'ensemble des nombres x qui appartiennent à à I et à J. On le note $x \in I \cap J$.

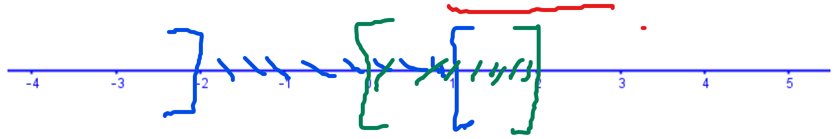
Exemple : ♦ $I = [-2;3]$ et $J = [1;5]$.

Alors $I \cap J =$ $[1;3]$



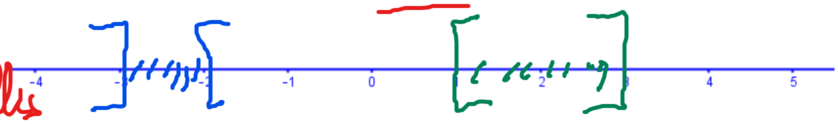
♦ $I =]-2;1[$ et $J = [0;2]$.

Alors $I \cap J =$ $[0;1[$



♦ $I =]-3;-2[$ et $J = [1;3]$.

Alors $I \cap J =$ $\emptyset$
aucun nombre appartient aux 2 intervalles

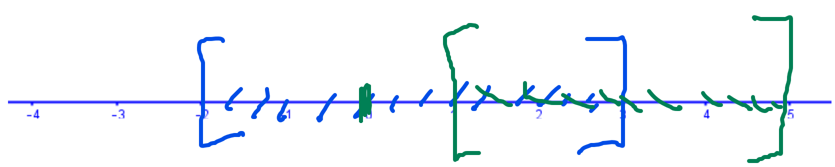


V. Réunion d'intervalles.

Définition : Soit I et J deux intervalles.
On appelle réunion de I et de J l'ensemble des nombres x qui appartiennent à I ou à J
On le note $x \in I \cup J$.

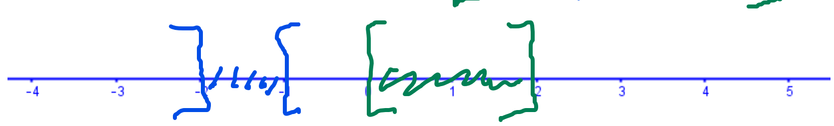
Exemple : ♦ $I = [-2;3]$ et $J = [1;5]$.

Alors $I \cup J =$ $[-2;5]$



♦ $I =]-2;-1[$ et $J = [0;2]$.

Alors $I \cup J =$
$]-2;-1[\cup [0;2]$

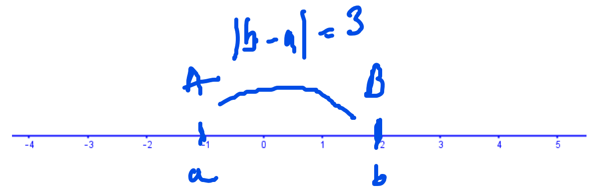


VI. Encadrement d'un nombre réel.

Avec la calculatrice, on trouve $\sqrt{2} \approx 1,414213562 4\ldots$

- ♦ Encadrement à l'unité près : $1 < \sqrt{2} < 2$, $\sqrt{2} \in \,]1 ; 2[$
- ♦ Encadrement au dixième près : $1,4 < \sqrt{2} < 1,5$, $\sqrt{2} \in \,]1,4 ; 1,5[$
- ♦ Encadrement au centième près : $1,41 < \sqrt{2} < 1,42$, $\sqrt{2} \in \,]1,41 ; 1,42[$

VII. Distance entre deux nombres.



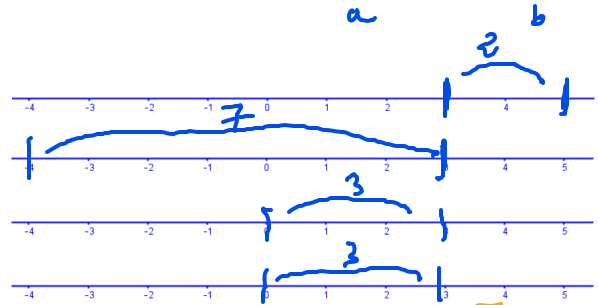
Définition : Soit a et b deux nombres réels, et A et B les points de la droite numérique d'abscisse respectives a et b.
On appelle distance entre les nombres a et b
la distance AB.
On la note $|b - a|$

Exemples : ♦ $|5 - 3| = 2$

♦ $|3 + 4| = |3 - (-4)| = 7$

♦ $|-3| = |0 - 3| = 3$

♦ $|3| = |3 - 0| = 3$



Définition : Pour tout nombre réel a,
la distance entre a et 0 s'appelle valeur absolue du nombre a et se note $|a|$.

$|7 - 10| = |-3| = 3$
$|10 - 7| = |3| = 3$

Propriété : Pour tous nombres réels a et b,

- ♦ Si $a \geq 0$ alors $|a| = a$. ♦ Si $a < 0$ alors $|a| = -a$.
- ♦ $|a| = |-a|$. ♦ $\boxed{|b - a| = |a - b|}$.

$|b - a| = d(a ; b)$
$d(x ; 3)$

☑ *Savoir-faire : Savoir résoudre une équation avec la valeur absolue.*

1) Trouve tous les nombres x tels que $|x| = 5$.

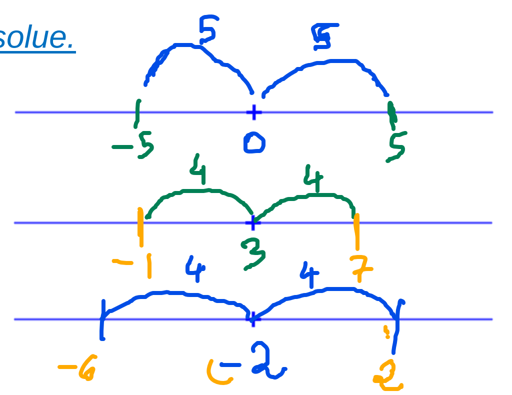
il y a deux solutions -5 et 5

2) Résoudre l'équation (E_1): $|x - 3| = 4$.

$S(E_1) = \{-1 ; 7\}$

3) Résoudre l'équation (E_2): $|x + 2| = 4$. $|x - (-2)| = 4$

$S(E_2) = \{-6 ; 2\}$



☑ *Savoir-faire : Savoir résoudre une inéquation avec la valeur absolue.*

1) Résoudre l'équation (I_1): $|x - 1| \leq 2$.

$S(I_1) = [-1 ; 3]$

2) Résoudre l'équation (I_1): $|x + 1| < 3$.

$S(I_2) = \,]-4 ; 2[$

3) Résoudre l'équation (I_2): $|x - 2| > 3$.

$S(I_3) = \,]-\infty ; -1[\, \cup \,]5 ; +\infty[$