Nombres complexes forme exponentielle.

Abraham de Moivre *(1667-1754) mathématicien français qui devint anglais après l'émigration de sa famille suite à l'édit de Nantes. Il a travaillé sur les nombres complexes et les racines nième de l'unité.*

I. Formules de trigonométrie.

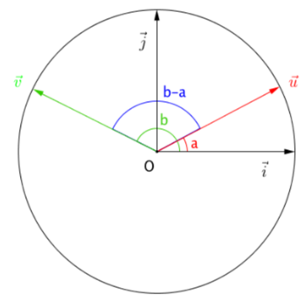
☺ Formules d'addition.

Définition : Soient a et b deux nombres réels quelconques.

☺ $\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$ ☺ $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$

☺ $\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b)$ ☺ $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$

Démonstration exigible :



☑ *Savoir-faire : Savoir calculer des valeurs de cos et sin à l'aide des formules d'addition :*

Calcule : ☺ $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ ☺ $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$

☺ Formules de duplication.

Définition : Soit a un nombre réel quelconque.

☺ $\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) = 2\cos^2(a) - 1 = 1 - 2\sin^2(a)$

☺ $\sin(2a) = 2\cos(a)\cos(a))$

☑ *Savoir-faire : Savoir calculer des valeurs de cos et sin à l'aide des formules de duplication :*

Calcule : ☺ $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ ☺ $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$

II. Forme exponentielle d'un nombre complexe.

☺ Définition de $e^{i\theta}$.

Définition :
Pour tout réel θ, on pose : $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$.

Remarques :

☺ $e^{i\theta}$ est le nombre complexe de module ...... et d'argument ....

☺ $e^{i0} =$ ....   ☺ $e^{i\frac{\pi}{2}} =$.........   ☺ $e^{i\pi} =$ ....

☺ Relation fonctionnelle.

Propriété : Pour tous réels θ et θ',

☺ $e^{i\theta}e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$ ☺ $\dfrac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$ ☺ $\dfrac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$ ☺ $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$

D'après la formule d'addition : $(\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\theta' + i\sin\theta') = \cos(\theta+\theta') + i\sin(\theta+\theta')$

....

....

....

☺ Forme exponentielle d'un nombre complexe.

Définition :
Tout nombre complexe z non nul de module r et d'argument θ s'écrit sous sa forme exponentielle : $z = re^{i\theta}$

☑ *Savoir-faire : Savoir déterminer la forme exponentielle d'un nombre complexe :*

Donne la forme exponentielle des nombres :   ☺ $z_1 = -2i$ ☺ $z_2 = -3$ ☺ $z_3 = \sqrt{3} - 3i$

....

....

....

....

....

....

☑ *Savoir-faire : Savoir déterminer la forme algébrique d'un nombre complexe :*

Donne la forme algébrique des nombres :   ☺ $z_4 = e^{i\frac{\pi}{6}}$ ☺ $z_5 = 4e^{i\frac{\pi}{4}}$

....

....

....

....

III. Formules de Moivre et d'Euler.

Formule de Moivre :

Pour tout réel θ et pour tout entier naturel n non nul : $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$.

Que l'on peut également écrire : $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$

Exemples :

....

....

....

....

☑ *Savoir-faire : Savoir utiliser la formule de Moivre :*

Exprime $\cos(3x)$ *en fonction de* $\cos(x)$.

....

....

....

....

Formule d'Euler :

Pour tout réel θ , $\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$

Exemples :

....

....

....

....

....

....

☑ *Savoir-faire : Savoir utiliser la formule d'Euler :*

Linéariser (*) l'expression $\cos^3 x$, en déduire une primitive de la fonction $x \longmapsto \cos^3 x$.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

IV. Utiliser les nombres complexes pour résoudre un problème de géométrie.

☺ Interprétation géométrique de $\frac{c-a}{b-a}$.

Propriété : $A(a)$, $B(b)$ et $C(c)$ sont trois points deux à deux distincts du plan.

☺ $(\vec{u}\,;\overrightarrow{AB}) = \arg(b-a)$ ☺ $AB = |b-a|$ ☺ $(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}) = \arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right)$

....

....

....

☑ *Savoir-faire : Savoir utiliser les nombres complexes en géométrie:*

Soit A, B et C trois points d'affixes respectives $z_A = -2-i$, $z_B = 1-2i$ et $z_C = -1+2i$.

☺ Démontrer que le triangle ABC est isocèle en A.

☺ Démontrer que le triangle ABC est rectangle en A.

....

....

....

....

....

....

☺ Ensembles de points :

☑ *Savoir-faire : Savoir déterminer un ensemble de points :*

Soit M un point d'affixe z. Dans chaque cas, déterminer et représenter :

1) L'ensemble des points M tels que $|z-2i| = 3$.

....

....

2) L'ensemble des points M tels que $|iz-3| = 1$.

....

....

....

3) L'ensemble des points M tels que $|\bar{z}-3+i| = |z-5|$.

....

....

....

4) L'ensemble des points M tels que $\frac{|z-i|}{|z|} = 2$.

....

....

....

5) L'ensemble des points M tels que $\arg(z) = \frac{\pi}{4}\ [\pi]$.

....

....

☺ Racine n-ième de l'unité:

Définition : Soit n un entier naturel non nul
On appelle racine nième de l'unité tout nombre complexe z tel que $z^n = 1$

Remarques :

☺ Pour tout entier naturel n non nul, 1 est solution de l'équation $(E): z^n = 1$.
☺ Les racines nièmes de l'unité sont les racines du polynôme $P(z) = z^n - 1$.

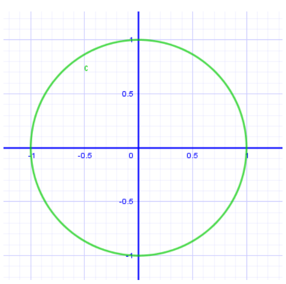
Propriété : L'ensemble $\mathbb{U}_n$ des racines n-ième de l'unité possède exactement n racines distinctes,
Ce sont les nombres complexes de la forme $e^{i\frac{2k\pi}{n}}$, avec k entier naturel tel que $0 \le k \le n-1$.

Démonstration exigible :

……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………

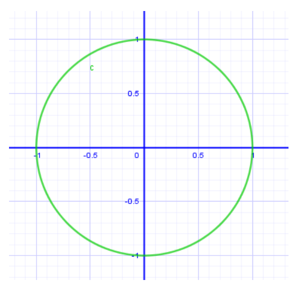
Remarques interprétation graphique :

$n = 2$



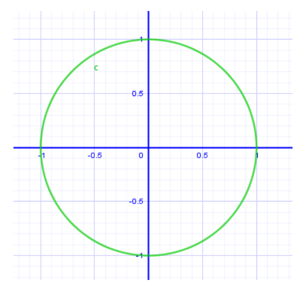
……………………………………
……………………………………
……………………………………
……………………………………

$n = 3$



……………………………………
……………………………………
……………………………………
……………………………………

$n = 4$



……………………………………
……………………………………
……………………………………
……………………………………

☑ *Savoir-faire : Savoir utiliser les racines de l'unité:*

Démontre que le périmètre d'un pentagone régulier inscrit dans un cercle de rayon 1 est égal à $10 \sin\frac{\pi}{5}$.

……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………