33

Baccalauréat S Asie 19 juin 2014

EXERCICE 3 6 points

Commun à tous les candidats

Une chaîne, suspendue entre deux points d'accroche de même hauteur peut être modélisée par la représentation graphique d'une fonction g définie sur $[-1\,;\,1]$ par

$$g(x) = \frac{1}{2a}\left(e^{ax} + e^{-ax}\right)$$

où a est un paramètre réel strictement positif. On ne cherchera pas à étudier la fonction g.

On montre en sciences physiques que, pour que cette chaîne ait une tension minimale aux extrémités, il faut et il suffit que le réel a soit une solution strictement positive de l'équation

$$(x-1)e^{2x} - 1 - x = 0.$$

Dans la suite, on définit sur $[0\,;\,+\infty[$ la fonction f par $f(x) = (x-1)e^{2x} - 1 - x$ pour tout réel $x \geqslant 0$.

1. Déterminer la fonction dérivée de la fonction f.
   Vérifier que $f'(0) = -2$ et que $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = +\infty$.
2. On note f'' la fonction dérivée de f'.
   Vérifier que, pour tout réel $x \geqslant 0$, $f''(x) = 4xe^{2x}$.
3. Montrer que, sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ la fonction f' s'annule pour une unique valeur, notée x_0.
4. **a.** Déterminer le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$, puis montrer que $f(x)$ est négatif pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0\,;\,x_0]$.

   b. Calculer $f(2)$.
   En déduire que sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$, la fonction f s'annule pour une unique valeur.
   Si l'on note a cette valeur, déterminer à l'aide de la calculatrice la valeur de a arrondie au centième.
5. On admet sans démonstration que la longueur L de la chaîne est donnée par l'expression

$$L = \int_0^1 \left(e^{ax} + e^{-ax}\right)\,dx.$$

   Calculer la longueur de la chaîne ayant une tension minimale aux extrémités, en prenant 1,2 comme valeur approchée du nombre a.