

EXERCICE 4

5 points

Candidats n'ayant pas choisi la spécialité mathématique

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1.On note f_n la fonction définie pour tout réel x de l'intervalle $[0; 1]$ par

$$f_n(x) = \frac{1}{1+x^n}.$$

Pour tout entier $n \geq 1$, on définit le nombre I_n par

$$I_n = \int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x^n} dx.$$

1. Les représentations graphiques de certaines fonctions f_n obtenues à l'aide d'un logiciel sont tracées ci-après.

En expliquant soigneusement votre démarche, conjecturer, pour la suite (I_n) l'existence et la valeur éventuelle de la limite, lorsque n tend vers $+\infty$.

2. Calculer la valeur exacte de I_1 .
3. a. Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle $[0; 1]$ et pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a :

$$\frac{1}{1+x^n} \leq 1.$$

- b. En déduire que, pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a : $I_n \leq 1$.

4. Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle $[0; 1]$ et pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a :

$$1-x^n \leq \frac{1}{1+x^n}.$$

5. Calculer l'intégrale $\int_0^1 (1-x^n) dx$.

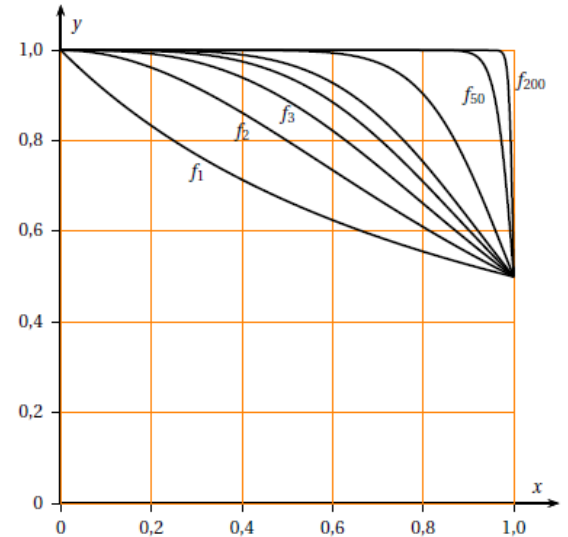
6. À l'aide des questions précédentes, démontrer que la suite (I_n) est convergente et déterminer sa limite.

7. On considère l'algorithme suivant :

Variation : n, p et k sont des entiers naturels
 x et I sont des réels

Initialisation : I prend la valeur 0

Traitement : Demander un entier $n \geq 1$
Demander un entier $p \geq 1$
Pour k allant de 0 à $p-1$ faire :
 x prend la valeur $\frac{k}{p}$
 I prend la valeur $I + \frac{1}{1+x^n} \times \frac{1}{p}$
Fin Pour
Afficher I



- a. Quelle valeur, arrondie au centième, renvoie cet algorithme si l'on entre les valeurs $n = 2$ et $p = 5$?

On justifiera la réponse en reproduisant et en complétant le tableau suivant avec les différentes valeurs prises par les variables, à chaque étape de l'algorithme. Les valeurs de I seront arrondies au millième.

k	x	I
0		
4		

- b. Expliquer pourquoi cet algorithme permet d'approcher l'intégrale I_n .