

## EXERCICE 1

5 points

Commun à tous les candidats

## Partie A

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on désigne par  $\mathcal{C}_1$  la courbe représentative de la fonction  $f_1$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f_1(x) = x + e^{-x}.$$

- Justifier que  $\mathcal{C}_1$  passe par le point A de coordonnées  $(0; 1)$ .
- Déterminer le tableau de variation de la fonction  $f_1$ . On précisera les limites de  $f_1$  en  $+\infty$  et en  $-\infty$ .

## Partie B

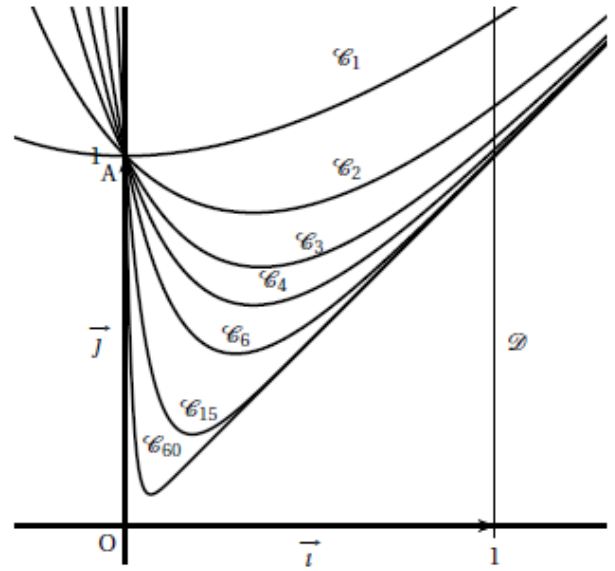
L'objet de cette partie est d'étudier la suite  $(I_n)$  définie sur  $\mathbb{N}$  par :

$$I_n = \int_0^1 (x + e^{-nx}) dx.$$

- Dans le plan muni d'un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ , pour tout entier naturel  $n$ , on note  $\mathcal{C}_n$  la courbe représentative de la fonction  $f_n$  définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$f_n(x) = x + e^{-nx}.$$

Sur le graphique ci-dessous on a tracé la courbe  $\mathcal{C}_n$  pour plusieurs valeurs de l'entier  $n$  et la droite  $\mathcal{D}$  d'équation  $x = 1$ .



- Interpréter géométriquement l'intégrale  $I_n$ .
  - En utilisant cette interprétation, formuler une conjecture sur le sens de variation de la suite  $(I_n)$  et sa limite éventuelle. On précisera les éléments sur lesquels on s'appuie pour conjecturer.
- Démontrer que pour tout entier naturel  $n$  supérieur ou égal à 1,

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^1 e^{-(n+1)x} (1 - e^x) dx.$$

En déduire le signe de  $I_{n+1} - I_n$  puis démontrer que la suite  $(I_n)$  est convergente.

- Déterminer l'expression de  $I_n$  en fonction de  $n$  et déterminer la limite de la suite  $(I_n)$ .