39 Baccalauréat S Métropole 19 juin 2014

EXERCICE 4 5 points

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Dans l'espace, on considère un tétraèdre ABCD dont les faces ABC, ACD et ABD sont des triangles rectangles et isocèles en A. On désigne par E, F et G les milieux respectifs des côtés [AB], [BC] et [CA].

On choisit AB pour unité de longueur et on se place dans le repère orthonormé $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right)$ de l'espace.

1. On désigne par $\mathscr{P}$ le plan qui passe par A et qui est orthogonal à la droite (DF).
On note H le point d'intersection du plan $\mathscr{P}$ et de la droite (DF).

a. Donner les coordonnées des points D et F.

b. Donner une représentation paramétrique de la droite (DF).

c. Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$.

d. Calculer les coordonnées du point H.

e. Démontrer que l'angle $\widehat{EHG}$ est un angle droit.

2. On désigne par M un point de la droite (DF) et par t le réel tel que $\overrightarrow{DM} = t\overrightarrow{DF}$.
On note α la mesure en radians de l'angle géométrique $\widehat{EMG}$.
Le but de cette question est de déterminer la position du point M pour que α soit maximale.

a. Démontrer que $ME^2 = \frac{3}{2}t^2 - \frac{5}{2}t + \frac{5}{4}$.

b. Démontrer que le triangle MEG est isocèle en M.
En déduire que $ME\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{2\sqrt{2}}$.

c. Justifier que α est maximale si et seulement si $\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ est maximal.
En déduire que α est maximale si et seulement si ME^2 est minimal.

d. Conclure.