Calculs dans ℝ.

***François Viète (1540 ; 1603)** mathématicien français, il initie le début de la révolution algébrique qui fondera les notations de l'algèbre contemporaine.*

I. Rappel de vocabulaire.

- La somme de deux termes a et b est le résultat de l'addition des nombres a et b, elle se note $a + b$.
- La différence de deux termes a et b est le résultat de la soustraction des nombres a et b, elle se note $a - b$.
- Le produit de deux facteurs a et b est le résultat de la multiplication des nombres a et b, il se note $a \times b$.
- La quotient de deux nombres a et b est le résultat de la division de a par b. *Il se note* $\frac{a}{b}$.

Définition : Deux nombres réels sont dits opposés si leur somme est nulle.
L'**opposé** du nombre réel a *se note* $(-a)$. Il vérifie $a + (-a) = 0$ et $-a = (-1) \times a$

Attention : $-a$ n'est pas forcément négatif : ♦ si a est positif alors $-a$ est négatif
♦ si a est négatif alors $-a$ est positif

Définition : Deux nombres réels non nuls sont dits inverses si leur produit est égal à 1.
L'**inverse** du nombre réel a *se note* $\frac{1}{a}$. Il vérifie $a \times \frac{1}{a} = 1$ et $1 : a = \frac{1}{a}$.

Remarque : ♦ deux nombres opposés sont de signes contraires
♦ deux nombres inverses sont de même signes

II. Rappel de règles de calcul.

Règle des signes : Pour tous nombres réels a et b, on a :

♦ $-(a+b) = (-1) \times (a+b) = -a-b$ ♦ $(-a) \times b = a \times (-b) = -ab$ ♦ $\frac{-a}{b} = \frac{a}{-b} = -\frac{a}{b}$

Distributivité : Pour tous nombres réels, on a :

♦ $k(a+b) = ka + kb$ ♦ $(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$

Égalités remarquables : Pour tous nombres réels a et b, on a :

♦ $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ ♦ $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ ♦ $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

Calculs avec des fractions : Pour tous nombres réels, on a :

♦ $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$ ♦ $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$

Égalité de carrés : Pour tous nombres réels a et b, on a : $a^2 = b^2 \Leftrightarrow a = b$ ou $a = -b$
Deux nombres ont le même carré si et seulement si ils sont égaux ou opposés.
Démonstration : $a^2 = b^2 \Leftrightarrow a^2 - b^2 = 0 \Leftrightarrow (a-b)(a+b) = 0 \Leftrightarrow a = b$ ou $a = -b$.

III. Puissances avec un exposant entier relatif.

Définition : Soit $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$,
$a^n = a \times a \times a \ldots\ldots \times a$. (avec n facteurs) et a^{-n} est l'inverse de a^n : $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

$2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$; $(-5)^2 = 25$; $a^1 = a$; $a^0 = 1$; $2^{-4} = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16}$; $4^{-1} = \frac{1}{4}$

Propriété : Pour tout nombre réel non nul a et tous entiers relatifs n et m.

- $a^n \times a^m = a^{n+m}$
- $(a^n)^m = a^{n \times m}$
- $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$

☑ *Savoir-faire : Savoir utiliser les formules sur les puissances.*

Simplifie $A = \frac{2^3 \times (2^5)^{-2}}{2^4 \times 2^{-6}}$

$A = \frac{2^3 \times 2^{-10}}{2^4 \times 2^{-6}} = \frac{2^{-7}}{2^{-2}} = 2^{-7-(-2)} = 2^{-5}$

Définition : L'écriture scientifique d'un nombre décimal est son écriture sous la forme $a \times 10^n$ avec $1 \leq a < 10$.

Exemples : $0{,}345 = 3{,}45 \times 10^{-1}$ $\quad 4243{,}5 = 4{,}2435 \times 10^3$

Remarque : tout nombre décimal peut s'écrire sous la forme $\frac{a}{10^n}$ $a \in \mathbb{Z}$.

IV. Racines carrées.

Définition : a étant un réel positif, $\sqrt{a}$ est le nombre positif qui multiplié par lui-même est égal à a.

Remarques :
- Il y a 2 nombres dont le carré est égal à 36 : 6 et -6

  $\sqrt{36}$ est le nombre positif dont le carré est égal à 36 : $\sqrt{36} = 6$.
- $\sqrt{a}$ est la solution positive de l'équation $x^2 = a$

Exemples : $\sqrt{100} = 10$; $\sqrt{25} = 5$; $\sqrt{1} = 1$; $\sqrt{0} = 0$; $\sqrt{13}$ ...

- Seuls les nombres positifs ou nuls ont une racine carrée. Un réel négatif n'a pas de racine carrée. Ainsi $\sqrt{-3}$ *n'existe pas* car il n'y a pas de nombre qui, multiplié par lui-même, soit égal à -3. (le carré d'un nombre réel est toujours positif).
- Si a est positif, $\sqrt{a}$ existe et est toujours positif ; $-\sqrt{a}$ existe aussi et est négatif.

Propriété : Pour tous nombres a et b positifs, $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$.

Démonstration exigible :

$(\sqrt{a \times b})^2 = a \times b$ $\qquad (\sqrt{a} \times \sqrt{b})^2 = \sqrt{a}^2 \times \sqrt{b}^2 = a \times b$

donc $(\sqrt{a \times b})^2 = (\sqrt{a} \times \sqrt{b})^2$ donc $\sqrt{a \times b}$ et $\sqrt{a} \times \sqrt{b}$ sont soit égaux soit opposés.

mais ils sont tous les deux positifs donc $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$.

Remarques : On démontre de même que pour tous nombres a et b positifs, $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.

☑ *Savoir-faire : Savoir réduire des racines carrées.*

$\sqrt{12} = \sqrt{4 \times 3} = \sqrt{4} \times \sqrt{3} = 2 \times \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$ $\qquad \sqrt{50} = \sqrt{25 \times 2} = \sqrt{25} \times \sqrt{2} = 5\sqrt{2}$

$\sqrt{500} = \sqrt{100 \times 5} = \sqrt{100} \times \sqrt{5} = 10\sqrt{5}$.

☑ *Savoir-faire : Savoir simplifier des racines carrées.*

Simplifie $A = 3\sqrt{50} - 5\sqrt{8} + 2\sqrt{162}$

$A = 3 \times \sqrt{25 \times 2} - 5 \times \sqrt{4 \times 2} + 2\sqrt{81 \times 2}$

$A = 3 \times \sqrt{25} \times \sqrt{2} - 5 \times \sqrt{4} \times \sqrt{2} + 2 \times \sqrt{81} \times \sqrt{2}$

$A = 3 \times 5 \times \sqrt{2} - 5 \times 2 \times \sqrt{2} + 2 \times 9 \times \sqrt{2}$

$A = 15\sqrt{2} - 10\sqrt{2} + 18\sqrt{2}$.

$A = 23\sqrt{2}$.

☑ *Savoir-faire : Savoir développer avec des racines carrées.*

Développe $A = (2\sqrt{3} - 4)(3 - \sqrt{3})$

$A = 2\sqrt{3} \times 3 - 2\sqrt{3} \times \sqrt{3} - 12 - 4 \times \sqrt{3}$

$A = 6\sqrt{3} - 2 \times \sqrt{3}^2 - 12 - 4\sqrt{3}$

$A = 6\sqrt{3} - 2 \times 3 - 12 - 4\sqrt{3}$

$A = -18 + 2\sqrt{3}$

Développe $B = (\sqrt{2} - 5\sqrt{3})^2$

$B = \sqrt{2}^2 - 2 \times \sqrt{2} \times 5\sqrt{3} + (5\sqrt{3})^2$

$B = 2 - 10\sqrt{6} + 25 \times 3$

$B = 77 - 10\sqrt{6}$

Propriété : Pour tous nombres a et b positifs, $\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

Démonstration exigible :

- $\sqrt{a+b}^2 = a + b$
- $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 = \sqrt{a}^2 + 2\sqrt{a} \times \sqrt{b} + \sqrt{b}^2$
  $= a + 2 \times \sqrt{a} \times \sqrt{b} + b$

$2\sqrt{a}\sqrt{b} \geq 0$ donc $(\sqrt{a+b})^2 \leq (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2$

2 nombres positifs sont rangés dans le même ordre que leurs carrés

donc $\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$

Remarques : Il n'y a égalité seulement si $a = 0$ ou $b = 0$

Propriété : Pour tous nombres a et b positifs et non nuls, $\sqrt{a+b} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

Remarques : On peut le justifier géométriquement :

Avec l'inégalité triangulaire de 5° on sait que $\boxed{BC \leq BA + AC}$.

or le triangle ABC est rectangle en A

donc d'après le Théorème de Mr Pythagore

$BC^2 = BA^2 + AC^2$

donc $BC^2 = \sqrt{a}^2 + \sqrt{b}^2$

donc $BC^2 = a + b$

donc $BC = \sqrt{a+b}$ ou $BC = -\sqrt{a+b}$

mais BC est un nombre positif

donc $BC = \sqrt{a+b}$

et donc $\boxed{} \Rightarrow \sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$