Calculs dans $\mathbb{R}$.

François Viète (1540 ; 1603) mathématicien français, il initie le début de la révolution algébrique qui fondera les notations de l'algèbre contemporaine.

I. Rappel de vocabulaire.

- La somme de deux termes a et b est le résultat de l'addition des nombres a et b, elle se note $a + b$.
- La différence de deux termes a et b est le résultat de la soustraction des nombres a et b, elle se note $a - b$.
- Le produit de deux facteurs a et b est le résultat de la multiplication des nombres a et b, il se note $a \times b$.
- La quotient de deux nombres a et b est le résultat de la division de a par b. *Il se note* $\frac{a}{b}$.

Définition : Deux nombres réels sont dits opposés si leur somme est nulle.
L'**opposé** du nombre réel a *se note* $(-a)$. Il vérifie $a + (-a) = 0$ et $-a = (-1) \times a$

Attention : $-a$ n'est pas forcément négatif : ♦ si a est positif alors $-a$ est ....
♦ si a est négatif alors $-a$ est ....

Définition : Deux nombres réels non nuls sont dits inverses si leur produit est égal à 1.
L'**inverse** du nombre réel a *se note* $\frac{1}{a}$. Il vérifie $a \times \frac{1}{a} = 1$ et $1 : a = \frac{1}{a}$.

Remarque : ♦ deux nombres opposés sont de ....
♦ deux nombres inverses sont de ....

II. Rappel de règles de calcul.

Règle des signes : Pour tous nombres réels a et b, on a :

♦ $-(a+b) = (-1) \times (a+b) = -a - b$ ♦ $(-a) \times b = a \times (-b) = -ab$ ♦ $\frac{-a}{b} = \frac{a}{-b} = -\frac{a}{b}$

Distributivité : Pour tous nombres réels, on a :

♦ $k(a+b) =$ .... ♦ $(a+b)(c+d) =$ ....

Égalités remarquables : Pour tous nombres réels a et b, on a :

♦ $(a+b)^2 =$ .... ♦ $(a-b)^2 =$ .... ♦ $(a+b)(a-b) =$ ....

Calculs avec des fractions : Pour tous nombres réels, on a :

♦ $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} =$ .... ♦ $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} =$..................................

Égalité de carrés : Pour tous nombres réels a et b, on a : $a^2 = b^2 \Leftrightarrow$ ....
Deux nombres ont le même carré si et seulement si ....
Démonstration : ....

III. Puissances avec un exposant entier relatif.

Définition : Soit $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$,
$a^n = a \times a \times a \ldots\ldots \times a$. (avec n facteurs) et a^{-n} est l'inverse de a^n : $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

$2^3 =$..........................; $(-5)^2 =$ ....; $a^1 =$........ ; $a^0 =$........ ; $2^{-4} =$ ....; $4^{-1} =$ ....

Propriété : Pour tout nombre réel non nul a et tous entiers relatifs n et m.

♦ $a^n \times a^m = a^{n+m}$ ♦ $(a^n)^m = a^{n\times m}$ ♦ $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$

☑ *Savoir-faire : Savoir utiliser les formules sur les puissances.*

Simplifie $A = \frac{2^3 \times (2^5)^{-2}}{2^4 \times 2^{-6}}$

....

Définition : L'écriture scientifique d'un nombre décimal est son écriture sous la forme $a \times 10^n$ avec $1 \leq a < 10$.

Exemples : ....

Remarque : ....

IV. Racines carrées.

Définition : a étant un réel positif, $\sqrt{a}$ est le nombre positif qui multiplié par lui-même est égal à a.

Remarques : ♦ Il y a ...... nombres dont le carré est égal à 36 ....

....

♦ $\sqrt{a}$ est la solution .... de l'équation ....

Exemples : ....

♦ Seuls les nombres positifs ou nuls ont une racine carrée. Un réel négatif n'a pas de racine carrée. Ainsi $\sqrt{-3}$ *n'existe pas* car il n'y a pas de nombre qui, multiplié par lui-même, soit égal à –3. (le carré d'un nombre réel est toujours positif).

♦ Si a est positif, $\sqrt{a}$ existe et est toujours positif ; $-\sqrt{a}$ existe aussi et est négatif.

Propriété : Pour tous nombres a et b positifs, $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$.

Démonstration exigible :

....

....

....

Remarques : On démontre de même que pour tous nombres a et b positifs, $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.

☑ *Savoir-faire : Savoir réduire des racines carrées.*

$\sqrt{12} =$ .... $\sqrt{50} =$ ....

$\sqrt{500} =$ ....

☑ *Savoir-faire : Savoir simplifier des racines carrées.*

Simplifie $A = 3\sqrt{50} - 5\sqrt{8} + 2\sqrt{162}$

....

....

....

☑ *Savoir-faire : Savoir développer avec des racines carrées.*

Développe $A = (2\sqrt{3} - 4)(3 - \sqrt{3})$

....

....

Développe $B = (\sqrt{2} - 5\sqrt{3})^2$

....

....

Propriété : Pour tous nombres a et b positifs, $\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

Démonstration exigible :

....

....

....

Remarques : Il n'y a égalité seulement si ....

Propriété : Pour tous nombres a et b positifs et non nuls, $\sqrt{a+b} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

Remarques : On peut le justifier géométriquement :

....

....

....

....

....

....

....

....