Généralités sur les fonctions

Le terme de fonction a été introduit par le mathématicien allemand LEIBNIZ Gottfried Wilhelm (1646-1716) en 1673 dans un manuscrit inédit "La Méthode inverse des tangentes ou à propos des fonctions".

I. Notion de fonctions.

Définition : Soit D un ou plusieurs intervalles de $\mathbb{R}$. Définir une fonction f de D dans $\mathbb{R}$, c'est associer à chaque réel x de D un unique réel noté $f(x)$. On dit que D est l'ensemble de définition de la fonction f, et on le note D_f.

On peut définir une fonction par une expression, un graphique, un algorithme ….

- Une fonction est généralement désignée par l'une des lettres f, g, h …
- Au lieu d'écrire « f est la fonction qui à x associe $f(x)$ », on peut écrire « $f : x \mapsto f(x)$ ».
- Si x et y sont deux réels tels que $y = f(x)$, alors on dit que y est l'image de x par la fonction f, et que x est un antécédent de y par f.
- Par une fonction, un réel x ne peut avoir qu'une seule image, mais un réel y peut avoir aucun, un ou plusieurs antécédents.

☑ *Savoir-faire : Savoir déterminer un ensemble de définition :*

Déterminer les ensembles de définition des fonctions qui ont les expressions suivantes :

- ♦ $f(x) = 2x + 3$

  f est une fonction affine
  $D_f = \mathbb{R}$

- ♦ $g(x) = x^2 - 1$

  g est une fonction du 2nd degré
  $D_g = \mathbb{R}$

- ♦ $h(x) = \frac{3}{3x+2}$

  h est une fonction rationnelle
  $D_h = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{2}{3}\}$
  $=]-\infty ; -\frac{2}{3}[\cup]-\frac{2}{3} ; +\infty[$

- ♦ $i(x) = \sqrt{2x+1}$

  $2x + 1 > 0 \iff$
  $x > -\frac{1}{2}$
  $D_i =]-\frac{1}{2} ; +\infty[$

☑ *Savoir faire : Savoir calculer une image ou un antécédent avec l'expression d'une fonction :*

Soit g la fonction définie par $g(x) = x^2 - 1$,

1) Déterminer l'image de 3 par g.

$g(3) = 3^2 - 1 = 9 - 1 = 8$

2) Déterminer tous les antécédents de 0 par g.

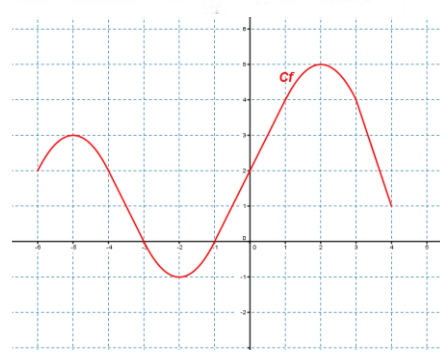
$x^2 - 1 = 0$

$S(E) = \{1 ; -1\}$

II. Courbe représentative d'une fonction.

Définition : Soit f une fonction d'ensemble de définition D_f. On appelle Courbe représentative de la fonction f l'ensemble C_f des points M du plan de coordonnées M(x ; $f(x)$) avec $x \in D_f$.

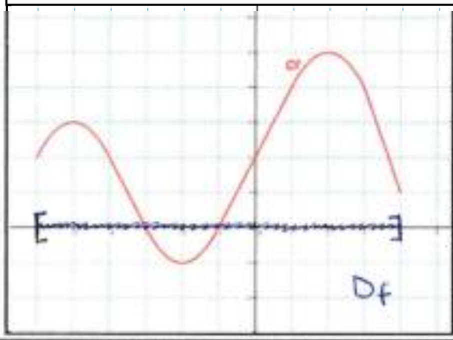
On dit que $y = f(x)$ est l'équation de la courbe C_f.



III. Utilisation de la courbe représentative d'une fonction.

Pour déterminer l'ensemble de définition de la fonction :

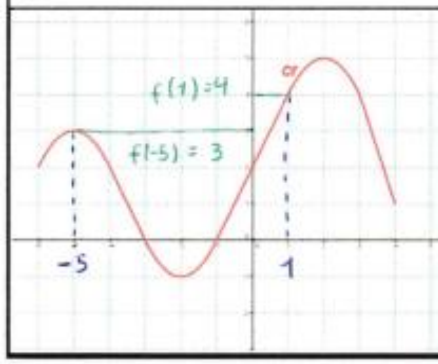
L'ensemble de Définition est l'ensemble des abscisses des points de la courbe.



$D_f = [-6 ; 4]$

Pour déterminer l'ensemble de l'image d'un nombre

L'image d'un nombre α par une fonction f est l'ordonnée du point d'intersection de C_f et de la droite d'équation $x = \alpha$.

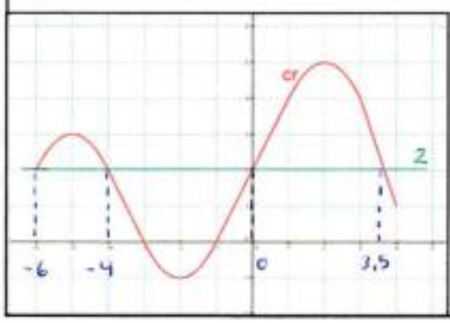


$f(1) = 4$

$f(-5) = 3$

Pour déterminer les antécédents d'un nombre k :

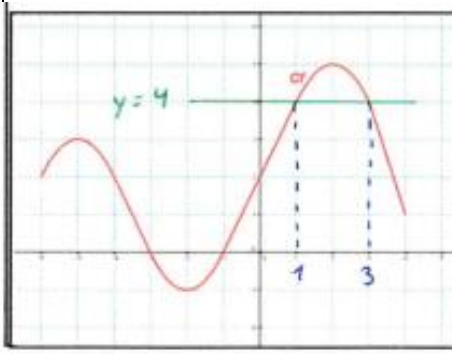
Les antécédents d'un nombre k par une fonction f sont les abscisses des points d'intersection de C_f et de la droite d'équation $y = k$.



Les antécédants de 2 sont -6, -4, 0 et 3,5

Pour résoudre une équation de la forme $f(x)= k$:

Résoudre l'équation $f(x)= k$ revient à chercher Les antécédents d'un nombre k par la fonction f.

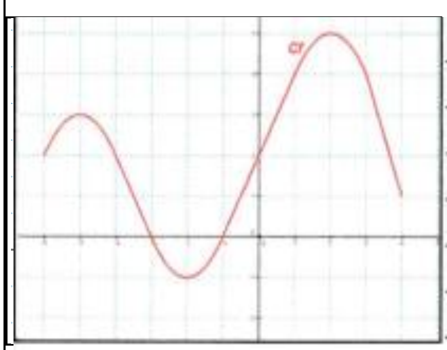


$(E) : f(x) = 4$

$S(E) = \{1 ; 3\}$

Pour résoudre une inéquation de la forme $f(x) > k$:

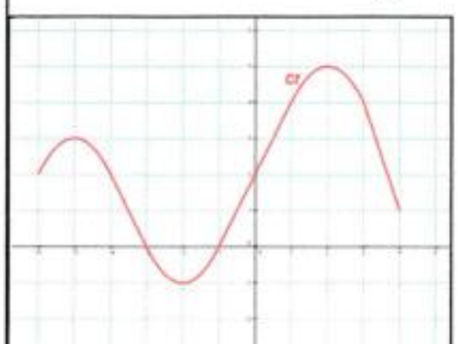
Les solutions de l'inéquation $f(x) > k$ sont les abscisses des points de C_f situés au-dessus de la droite d'équation $y = k$.



$(I) : f(x) > 0$

$S(I) = [-6 ; -3] \cup]-1 ; 4]$

Pour établir le tableau de signe d'une fonction :



$f(x) = 0$ a pour solution $\{-3 ; 1\}$

$f(x) > 0$ a pour solution $[-6 ; -3[\cup]-1 ; 4]$

x	-6		-3		-1		4
Signe de $f(x)$		+	0	−	0	+	

IV. Sens de variation d'une fonction.

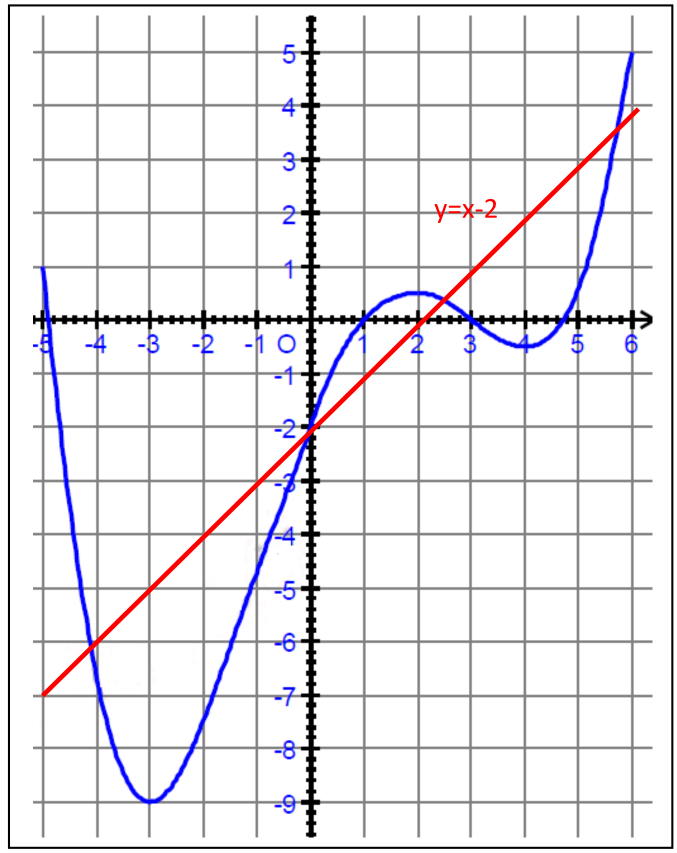
Définition : Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

♦ Si pour tous réels a et b de I tels que a ≤ b, on a *f*(a) ≤ *f* (b) alors on dit que la fonction *f* est croissante sur I.
Les réels de l'intervalle I sont rangés dans le **même ordre** que leurs images.

♦ Si pour tous réels a et b de I tels que a ≤ b, on a *f* (a) ≥ *f* (b) alors on dit que la fonction *f* est décroissante sur I.
Les réels de l'intervalle I sont rangés dans l'ordre **inverse** de leurs images.

☑ *Savoir-faire : Utiliser la courbe représentative d'une fonction :*

On considère la fonction f dont la courbe représentative est donnée par le graphique ci-contre.



On considère la fonction f dont la courbe représentative est donnée par le graphique ci contre.

1) Donne l'ensemble de définition de f.

Df = [-5 ; 6]

2) Détermine f (-3), f (0) et f (6).

f(-3) = -9 f(0) = -2
f(6) = 5

3) Détermine les antécédents de 0, 2 et -2.

Les antécédents de 0 sont -4,9 ; 1 ; 3 et 4,8, de 2 est 5,4 et de -2 sont -4,6 et 0.

4) Résoudre l'équation (E) : f (x) = -7.

S(E) = {-4 ; -1,8}

5) Résoudre l'inéquation (I) : f (x) > -5.

S(I) =]-4,4 ; -1,2[∪]-1,2 ; 6[

6) Etablir le tableau de signes de f (x).

x	-5		-4,9		1		3		4,8		6
Signes de $f(x)$		+	0	-	0	+	0	-	0	+	

7) Préciser les variations de f.

croissante sur [-3 ; 2] ∪ [4 ; 6]
decroissante sur [-5 ; -3] ∪ [2 ; 4]

8) Etablir le tableau de variations de f.

x	-5		-3		2		4		6
Variations de f	1	↘	-9	↗	1,5	↘	0,5	↗	5

9) Complète les affirmations suivantes :

Si 5 ≤ x ≤ 6 alors 0,5 ≤ f (x) ≤ 5

Si -3 ≤ x ≤ 3 alors -9 ≤ f (x) ≤ 0,5

10) Détermine le maximum et le minimum de f sur [-5 ; 6].

Le minimum de f sur [-5 ; 6] est -9 atteint pour f(-3), le maximum est 5 atteint pour f(6).

11) Détermine le maximum et le minimum de f sur [0 ; 3].

Le minimum est -2 atteint pour x = 0, le maximum 0,5 atteint pour x = 2

12) Détermine le nombre de solutions de l'équation (E) : f (x) = x -2.

S(E) = {-4,1 ; 0 ; 2,5 ; 5,8}