Généralités sur les fonctions

Le terme de fonction a été introduit par le mathématicien allemand LEIBNIZ Gottfried Wilhelm (1646-1716) en 1673 dans un manuscrit inédit "La Méthode inverse des tangentes ou à propos des fonctions".

I. Notion de fonctions.

Définition : Soit D un ou plusieurs intervalles de $\mathbb{R}$. Définir une fonction f de D dans $\mathbb{R}$, c'est associer à chaque réel x de D un <u>unique</u> réel noté $f(x)$. On dit que D est l'ensemble de définition de la fonction f, et on le note D_f.

On peut définir une fonction par une expression, un graphique, un algorithme ….

- Une fonction est généralement désignée par l'une des lettres f, g, h …
- Au lieu d'écrire « f est la fonction qui à x associe $f(x)$ », on peut écrire « $f : x \mapsto f(x)$ ».
- Si x et y sont deux réels tels que $y = f(x)$, alors on dit que y est l'image de x par la fonction f, et que x est un antécédent de y par f.
- Par une fonction, un réel x ne peut avoir qu'une seule image, mais un réel y peut avoir aucun, un ou plusieurs antécédents.

☑ *Savoir-faire : Savoir déterminer un ensemble de définition :*

Déterminer les ensembles de définition des fonctions qui ont les expressions suivantes :

♦ $f(x) = 2x + 3$	♦ $g(x) = x^2 - 1$	♦ $h(x) = \frac{3}{3x+2}$	♦ $i(x) = \sqrt{2x+1}$
………………………………	………………………………	………………………………	………………………………
………………………………	………………………………	………………………………	………………………………
………………………………	………………………………	………………………………	………………………………
………………………………	………………………………	………………………………	………………………………
………………………………	………………………………	………………………………	………………………………

☑ *Savoir faire : Savoir calculer une image ou un antécédent avec l'expression d'une fonction :*

Soit g la fonction définie par $g(x) = x^2 - 1$,

1) Déterminer l'image de 3 par g.

……

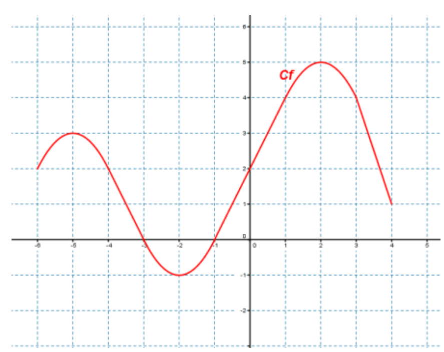
2) Déterminer tous les antécédents de 0 par g.

……

……

II. Courbe représentative d'une fonction.

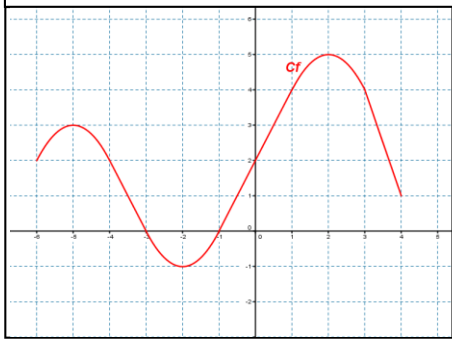
Définition : Soit f une fonction d'ensemble de définition D_f. On appelle Courbe représentative de la fonction f l'ensemble C_f des points M du plan de coordonnées M(x ; $f(x)$) avec $x \in D_f$.
On dit que $y = f(x)$ est l'équation de la courbe C_f.



III. Utilisation de la courbe représentative d'une fonction.

Pour déterminer l'ensemble de définition de la fonction :

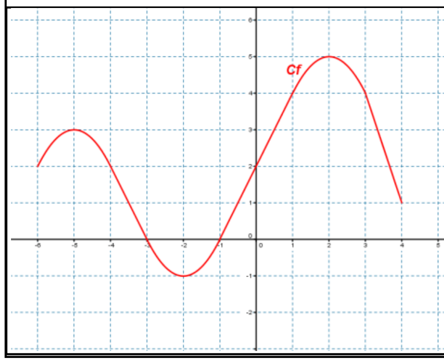
L'ensemble de Définition est l'ensemble des abscisses des points de la courbe.



....
....
....
....
....
....
....

Pour déterminer l'ensemble de l'image d'un nombre

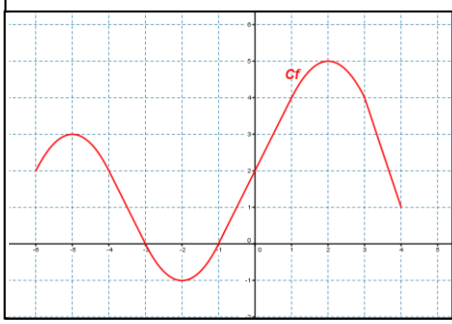
L'image d'un nombre α par une fonction f est l'ordonnée du point d'intersection de C_f et de la droite d'équation $x = \alpha$.



....
....
....
....
....
....
....

Pour déterminer les antécédents d'un nombre k :

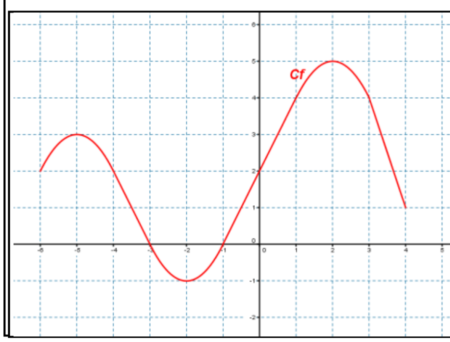
Les antécédents d'un nombre k par une fonction f sont les abscisses des points d'intersection de C_f et de la droite d'équation $y = k$.



....
....
....
....
....
....
....

Pour résoudre une équation de la forme $f(x) = k$:

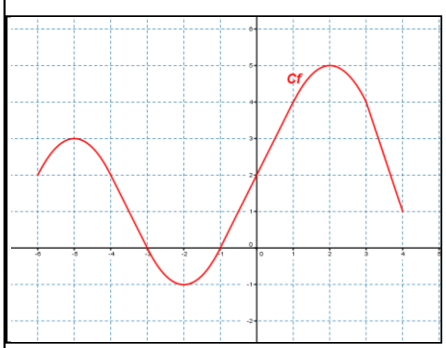
Résoudre l'équation $f(x) = k$ revient à chercher Les antécédents d'un nombre k par la fonction f.



....
....
....
....
....
....
....

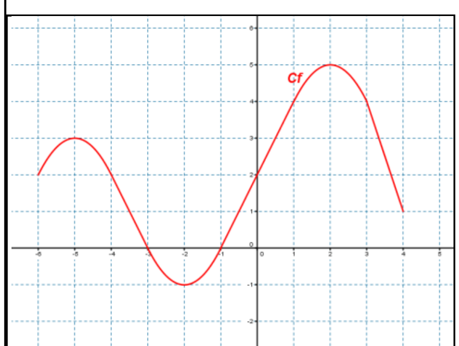
Pour résoudre une inéquation de la forme $f(x) > k$:

Les solutions de l'inéquation $f(x) > k$ sont les abscisses des points de C_f situés au-dessus de la droite d'équation $y = k$.



....
....
....
....
....
....
....

Pour établir le tableau de signe d'une fonction :



....
....
....
....
....
....
....

x	
Signe de $f(x)$	

IV. Sens de variation d'une fonction.

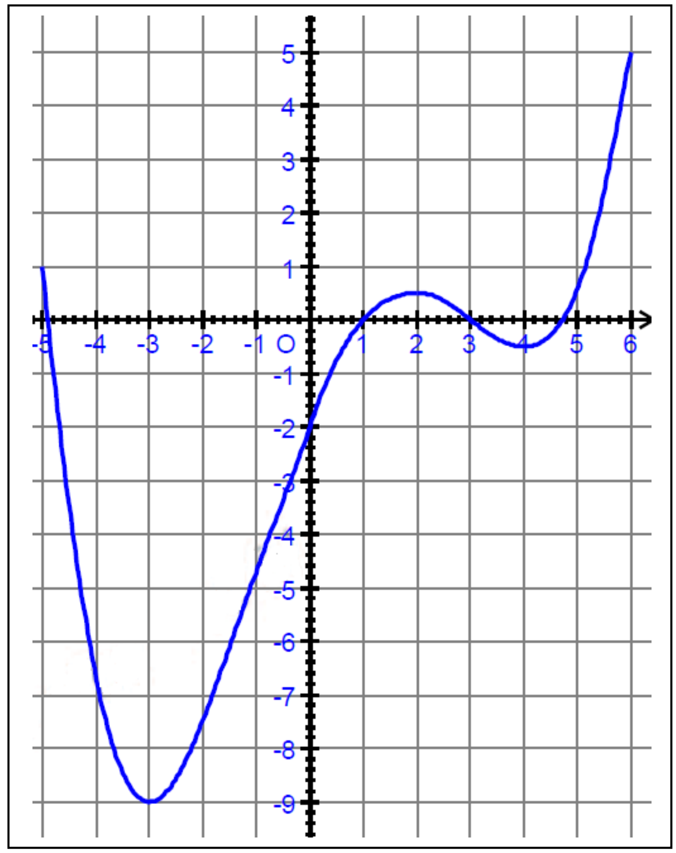
Définition : Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

♦ Si pour tous réels a et b de I tels que $a \leq b$, on a $f(a) \leq f(b)$ alors on dit que la fonction f est croissante sur I.
Les réels de l'intervalle I sont rangés dans le **même ordre** que leurs images.

♦ Si pour tous réels a et b de I tels que $a \leq b$, on a $f(a) \geq f(b)$ alors on dit que la fonction f est décroissante sur I.
Les réels de l'intervalle I sont rangés dans l'ordre **inverse** de leurs images.

☑ *Savoir-faire : Utiliser la courbe représentative d'une fonction :*

On considère la fonction f dont la courbe représentative est donnée par le graphique ci-contre.



1) Donne l'ensemble de définition de f.

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

2) Détermine $f(-3)$, $f(0)$ et $f(6)$.

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

3) Détermine les antécédents de 0, 2 et -2.

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

4) Résoudre l'équation $(E) : f(x) = -7$.

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

5) Résoudre l'inéquation $(I) : f(x) > -5$.

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

6) Etablir le tableau de signes de $f(x)$.

x	
Signes de $f(x)$	

7) Préciser les variations de f.

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

8) Etablir le tableau de variations de f.

x	
Variations de f	

9) Complète les affirmations suivantes :

Si $5 \leq x \leq 6$ *alors* ……… $\leq f(x) \leq$ ………

Si $-3 \leq x \leq 3$ *alors* ……… $\leq f(x) \leq$ ………

10) Détermine le maximum et le minimum de f sur [-5 ; 6].

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

11) Détermine le maximum et le minimum de f sur [0 ; 3].

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

12) Détermine le nombre de solutions de l'équation
$(E) : f(x) = x - 2$.

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………