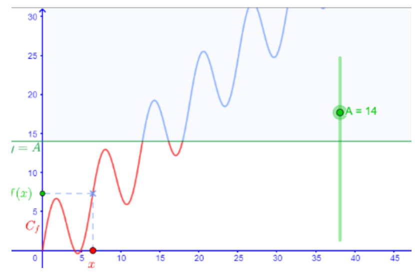
# Limites de fonction.

*Jean Le Rond d'Alembert* (1717-1783) mathématicien, physicien et philosophe français donne dans l'Encyclopédie une définition de la limite d'une fonction.

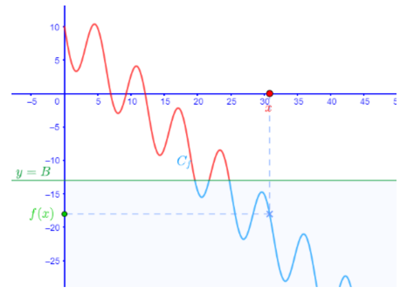
## I. Limite d'une fonction en $+\infty$.




### ☺ Limite infinie

**Définition :** On dit que la fonction $f$ admet pour limite $+\infty$ en $+\infty$ si tout intervalle ouvert de la forme $]\,A\,;\,+\infty[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ dès que $x$ est suffisamment grand et on note : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

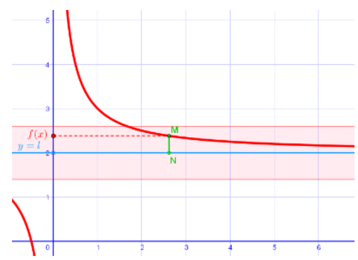
Traduction en langage Mathématique : $\forall\, A \in \mathbb{R},\ \exists\, x_0$ *tel que* $\forall\, x \geq x_0\,,\, f(x) \geq A$ .




**Définition :** On dit que la fonction $f$ admet pour limite $-\infty$ en $+\infty$ si tout intervalle ouvert de la forme $]\,-\infty\,;B\,[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ dès que $x$ est suffisamment grand et on note : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

Traduction en langage Mathématique : $\forall\, B \in \mathbb{R},\ \exists\, x_0$ *tel que* $\forall\, x \geq x_0\,,\, f(x) \leq B$ .

### ☺ Limite finie



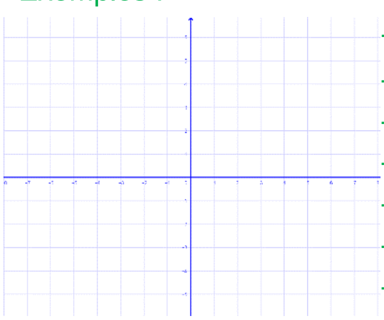

**Définition :** Soit $l$ un nombre réel. On dit qu'une fonction $f$ a pour limite $l$ en $+\infty$ , si tout intervalle ouvert contenant $l$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ dès que $x$ est suffisamment grand et on note : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$.

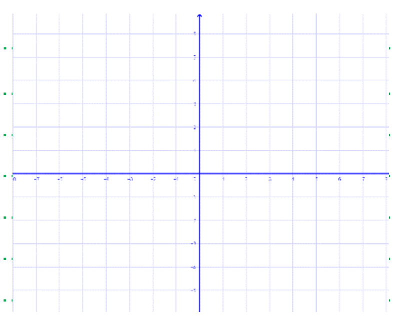
Traduction en langage Mathématique : $\forall\, I$ *intervalle ouvert contenant* $l,\ \exists\, x_0$ *tel que* $\forall\, x \geq x_0\,,\, f(x) \in I$ .

## II. Limite d'une fonction en $-\infty$.

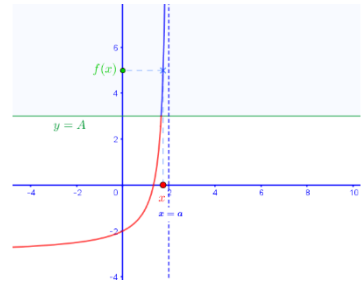
Les définitions sont analogues à celles en $+\infty$.

Exemples :





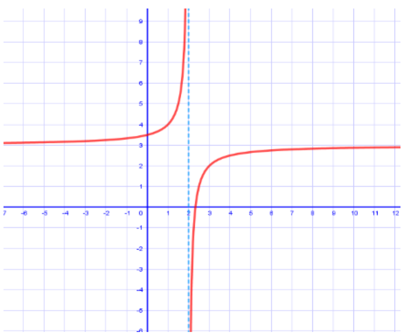
## III. Limite d’une fonction en un réel $a$.




Définition : Soit $a$ un nombre réel.
On dit que la fonction $f$ admet pour limite $+\infty$ en $a$ si tout intervalle ouvert de la forme $]A\,;+\infty[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ dès que $x$ est suffisamment proche de $a$ et on note : $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$.

Définition : Soit $a$ un nombre réel.
On dit que la fonction $f$ admet pour limite $-\infty$ en $a$ si tout intervalle ouvert de la forme $]-\infty\,; B[$, contient toutes les valeurs de $f(x)$ dès que $x$ est suffisamment proche de $a$ et on note : $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$.

Remarque :



*Certaines fonctions ont des limites différentes selon qu’on approche le nombre a par valeurs supérieures ( $x \to a$ et $x \geq a$ ) ou par valeurs inférieures ( $x \to a$ et $x \leq a$ ).*
*On parle alors de limite à droite en a et limite à gauche en a.*
*On écrit :*

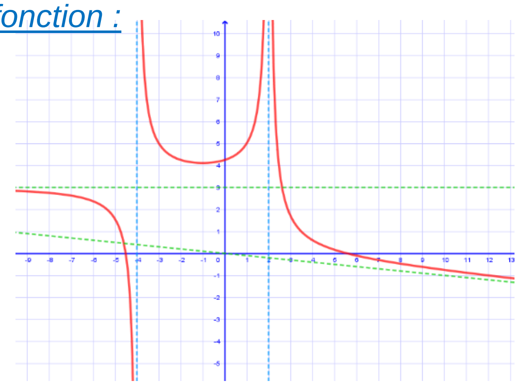
…………………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………………

☑ *Savoir-faire : Savoir déterminer graphiquement les limites d’une fonction :*



*Soit $f$ la fonction représentée ci-contre, détermine les limites aux bornes de son ensemble de définition.*

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

## IV. Opérations sur les limites.

### ☺ Limites des fonctions de référence

Propriété :

☺ $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 =$ ………… ☺ $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 =$ ………… ☺ $\lim\limits_{x \to +\infty} x^3 =$ ………… ☺ $\lim\limits_{x \to -\infty} x^3 =$ …………

☺ $\lim\limits_{x \to +\infty} x^n =$ ………… ☺ $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n =$ ………… ☺ $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n =$ …………

☺ $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} =$ ………… ☺ $\lim\limits_{x \to 0} \sqrt{x} =$ ………… ☺ $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x =$ ………… ☺ $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x =$ …………

☺ $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} =$ ………… ☺ $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x} =$ ………… ☺ $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \dfrac{1}{x} =$ ………… ☺ $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \dfrac{1}{x} =$ …………

☺ Limite d'une Somme :

$\alpha$ peut désigner $+\infty$, $-\infty$ ou un nombre réel.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) =$ | $l$ | $l$ | $l$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ |
| $\lim\limits_{x\to\alpha} g(x) =$ | $l\,'$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ |
| $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)+g(x) =$ | | | | | | |

...............................................
...............................................
...............................................
...............................................
...............................................
...............................................
...............................................

☺ Limite d'un Produit :

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) =$ | $l$ | $l > 0$ | $l < 0$ | $l > 0$ | $l < 0$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $0$ |
| $\lim\limits_{x\to\alpha} g(x) =$ | $l\,'$ | $+\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ ou $-\infty$ |
| $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)g(x) =$ | | | | | | | | | |

On applique la règle des signes pour déterminer si le produit est $+\infty$ ou $-\infty$.

.........................
.........................
.........................
.........................
.........................
.........................
.........................

☺ Limite d'un Quotient :

$\infty$ désigne $+\infty$ ou $-\infty$

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) =$ | $l$ | $l \neq 0$ | $l$ | $\infty$ | $\infty$ | $0$ |
| $\lim\limits_{x\to\alpha} g(x) =$ | $l\,' \neq 0$ | $0$ | $\infty$ | $l$ | $\infty$ | $0$ |
| $\lim\limits_{x\to\alpha} \dfrac{f(x)}{g(x)} =$ | | | | | | |

.............................................................................
.............................................................................
.............................................................................
.............................................................................
.............................................................................
.............................................................................
.............................................................................

## ☑ Savoir-faire : Savoir déterminer la limite d'une suite par opération :

*Détermine les limites suivantes :*

$$\lim_{x\to-\infty} (x-5)(3+x^2)$$

.....................................................
.....................................................
.....................................................
.....................................................
.....................................................

$$\lim_{x\to-1} \frac{1}{x+1}$$

.....................................................
.....................................................
.....................................................
.....................................................
.....................................................

$$\lim_{x\to3} \frac{1-2x}{x-3}$$

.....................................................
.....................................................
.....................................................
.....................................................
.....................................................

## ☑ Savoir-faire : Savoir calculer une limite avec une forme indéterminée :

*Déterminer les limites suivantes :*

☺ $\lim\limits_{x\to+\infty} -3x^3+2x^2-6x+1$ ☺ $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x^2-5x+1}{6x^2-5}$ ☺ $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{3x^2+2}{4x-1}$ ☺ $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x+1}-\sqrt{x}$

.......................................................................................................................................
.......................................................................................................................................
.......................................................................................................................................
.......................................................................................................................................
.......................................................................................................................................
.......................................................................................................................................
.......................................................................................................................................

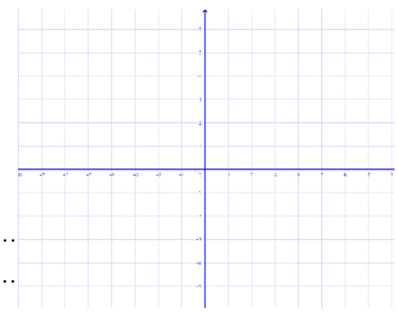
# V. Asymptotes à une courbe.

**Définition :**
On dit que la droite d'équation $y = l$ est asymptote horizontale à la courbe représentative de la fonction $f$ en $+\infty$ lorsque $f$ a pour limite $l$ en en $+\infty$ ( $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l.$ )

La définition est analogue pour une asymptote horizontale en $-\infty$.

**Définition :**
On dit que la droite d'équation $x = a$ est asymptote verticale à la courbe représentative de la fonction $f$ lorsque $f$ a pour limite $+\infty$ ou $-\infty$ en $a$ ( $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$ )

☑ *Savoir-faire : Savoir déterminer une asymptote :*



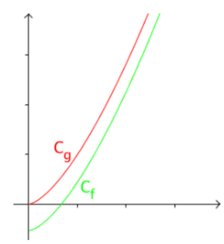
*Soit* $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par $f(x) = \frac{-2}{1-x}$

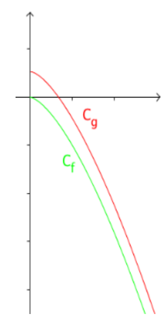
Démontrer que la courbe représentative de la fonction $f$ admet des asymptotes dont on précisera les équations.

.......................................................................................................................................
.......................................................................................................................................
.......................................................................................................................................
.......................................................................................................................................
.......................................................................................................................................

# VI. Théorèmes de comparaison.

☺ Limite infinie :

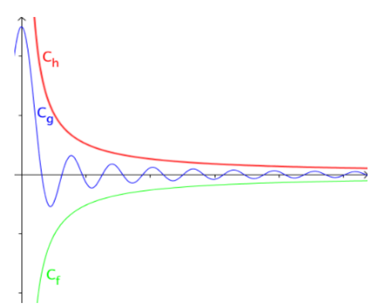



**Théorème de comparaison :**
Soit $f$ et $g$ deux fonctions définies sur un intervalle $]A\,;\,+\infty[$,
telles que pour tout $x > A$, on a $f(x) \leq g(x)$.
☺ Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$
☺ Si $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

Le même théorème est vrai en $-\infty$ ou en un nombre $a$.

☺ Limite finie :




**Théorème des gendarmes :**
Soit $f$, $g$ et $h$ trois fonctions définies sur un intervalle $]A\,;\,+\infty[$,
telles que pour tout $x > A$, on a $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$.
Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = l$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = l$.

On obtient un théorème analogue en $-\infty$.

☑ *Savoir-faire : Savoir utiliser les théorèmes de comparaison :*

Calculer les limites : ☺ $\lim\limits_{x \to +\infty} x + \sin x$ ☺ $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x \cos x}{x^2+1}$

........................................................................................................................................................................

........................................................................................................................................................................

........................................................................................................................................................................

........................................................................................................................................................................

## VII. La fonction exponentielle.

Propriété :

☺ $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x =$ ........... ☺ $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x =$ ...........

*Démonstration exigible :*

........................................................................................................................................................................

........................................................................................................................................................................

........................................................................................................................................................................

........................................................................................................................................................................

### ☺ Croissances comparées :

Théorème des croissances comparées :

☺ $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ et pour tout entier $n$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$

☺ $\lim\limits_{x \to -\infty} x\, e^x = 0$ et pour tout entier $n$, $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n\, e^x = 0$

*Démonstration exigible :*

........................................................................................................................................................................

........................................................................................................................................................................

........................................................................................................................................................................

........................................................................................................................................................................

........................................................................................................................................................................

........................................................................................................................................................................

........................................................................................................................................................................

☑ *Savoir-faire : Savoir calculer une limite par croissance comparée :*

Calculer la limite : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x+x}{e^x-x^2}$

........................................................................................................................................................................

........................................................................................................................................................................

........................................................................................................................................................................

........................................................................................................................................................................

........................................................................................................................................................................