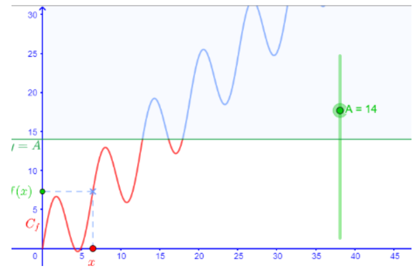
Limites de fonction.

Jean Le Rond d'Alembert *(1717-1783) mathématicien, physicien et philosophe français donne dans l'Encyclopédie une définition de la limite d'une fonction.*

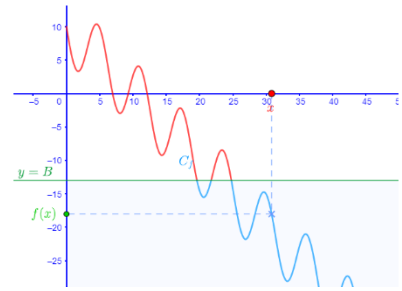
I. Limite d'une fonction en $+\infty$.



☺ Limite infinie

Définition : On dit que la fonction f admet pour limite $+\infty$ en $+\infty$ si tout intervalle ouvert de la forme $]A\,;+\infty[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ dès que x est suffisamment grand et on note : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

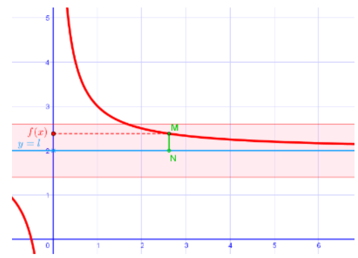
Traduction en langage Mathématique : $\forall A \in \mathbb{R},\ \exists x_0$ *tel que* $\forall x \geq x_0, f(x) \geq A$.



Définition : On dit que la fonction f admet pour limite $-\infty$ en $+\infty$ si tout intervalle ouvert de la forme $]-\infty\,;B[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ dès que x est suffisamment grand et on note : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$.

Traduction en langage Mathématique : $\forall B \in \mathbb{R},\ \exists x_0$ *tel que* $\forall x \geq x_0, f(x) \leq B$.

☺ Limite finie



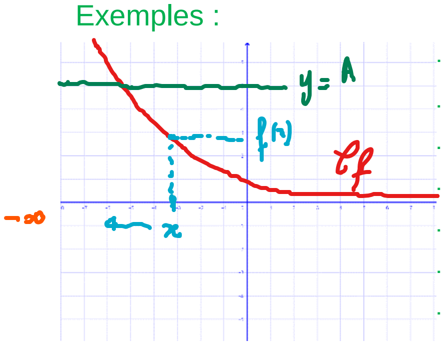
Définition : Soit l un nombre réel. On dit qu'une fonction f a pour limite l en $+\infty$, si tout intervalle ouvert contenant l contient toutes les valeurs de $f(x)$ dès que x est suffisamment grand et on note : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=l$.

Traduction en langage Mathématique : $\forall I$ *intervalle ouvert contenant* $l,\ \exists x_0$ *tel que* $\forall x \geq x_0, f(x) \in I$.

II. Limite d'une fonction en $-\infty$.

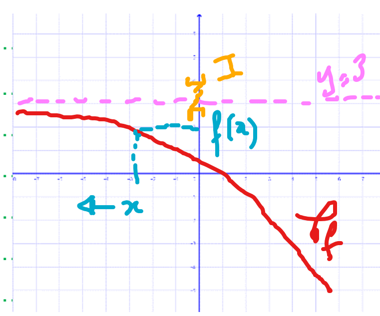
Les définitions sont analogues à celles en $+\infty$.

Exemples :



lorsque x devient de plus en plus petit, x tend vers $-\infty$, f(x) devient de plus en plus grand

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$



lorsque x devient de plus en plus petit, f(x) se rapproche de 3.

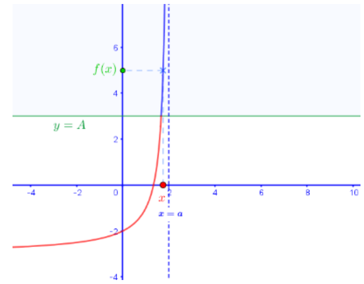
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=3$

$\Leftrightarrow \forall I$ intervalle ouvert contenant 3, $\exists x_0 / \forall x \leq x_0$ $f(x) \in I$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty \Leftrightarrow \forall A \in \mathbb{R}, \exists x_0 / \forall x \leq x_0$ $f(x) \geq A$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty \Leftrightarrow \forall B \in \mathbb{R}, \exists x_0 / \forall x \leq x_0$ $f(x) \leq B$

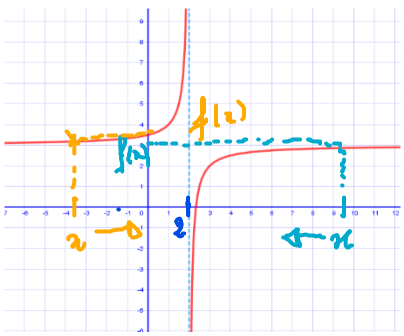
III. Limite d'une fonction en un réel a.



Définition : Soit a un nombre réel.
On dit que la fonction f admet pour limite $+\infty$ en a si tout intervalle ouvert de la forme $]A\,;+\infty[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ dès que x est suffisamment proche de a et on note : $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$.

Définition : Soit a un nombre réel.
On dit que la fonction f admet pour limite $-\infty$ en a si tout intervalle ouvert de la forme $]-\infty\,; B[$, contient toutes les valeurs de $f(x)$ dès que x est suffisamment proche de a et on note : $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$.

Remarque :



Certaines fonctions ont des limites différentes selon qu'on approche le nombre a par valeurs supérieures ($x \to a$ et $x \geq a$) ou par valeurs inférieures ($x \to a$ et $x \leq a$).
On parle alors de limite à droite en a et limite à gauche en a.
On écrit :

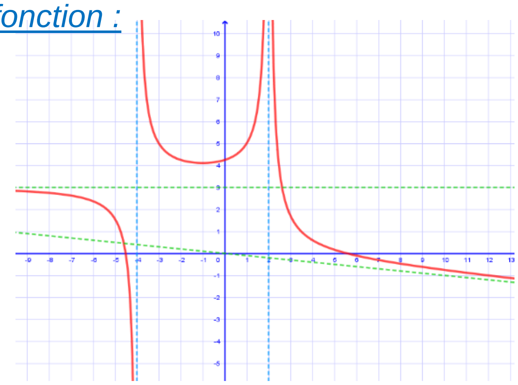
* lorsque x se rapproche de 2 par valeurs supérieures ($x \to 2$ et $x > 2$)

* $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} f(x) = -\infty$

* lorsque x se rapproche de 2 par valeurs inférieures ($x \to 2$ et $x < 2$)

$\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}} f(x) = +\infty$

☑ *Savoir-faire : Savoir déterminer graphiquement les limites d'une fonction :*



Soit f la fonction représentée ci-contre, détermine les limites aux bornes de son ensemble de définition.

$D_f =]-\infty\,;-4[\, \cup\,]-4\,;2[\, \cup\,]2\,;+\infty[$

$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = 3$ $\quad \lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = -\infty$ $\quad \lim\limits_{\substack{x\to -4\\ x<-4}} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{\substack{x\to -4\\ x>-4}} f(x) = +\infty$ $\quad \lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}} f(x) = +\infty$ $\quad \lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} f(x) = +\infty$

IV. Opérations sur les limites.

☺ Limites des fonctions de référence (on utilise les courbes représentatives...)

Propriété :

☺ $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$ ☺ $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$ ☺ $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$ ☺ $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$

☺ $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n = +\infty$ ☺ $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n = +\infty$ si n est pair ☺ $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n = -\infty$ si n est impair.

☺ $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$ ☺ $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{x} = 0$ ☺ $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ ☺ $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$

☺ $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$ ☺ $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$ ☺ $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{x} = +\infty$ ☺ $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{1}{x} = -\infty$

☺ Limite d'une Somme :

α peut désigner $+\infty$, $-\infty$ ou un nombre réel.

$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) =$	l	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{x\to\alpha} g(x) =$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)+g(x) =$	$l+l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	FI

Les règles sont les mêmes que pour les suites. Pour calculer la limite d'une forme indéterminée, il est nécessaire de transformer l'expression de la fonction.

☺ Limite d'un Produit :

$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) =$	l	$l>0$	$l<0$	$l>0$	$l<0$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	0
$\lim\limits_{x\to\alpha} g(x) =$	l'	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)g(x) =$	ll'	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	FI.

On applique la règle des signes pour déterminer si le produit est $+\infty$ ou $-\infty$.

* $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x} = +\infty$
* $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{x^2} = 0$
* $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{x} = 1$

☺ Limite d'un Quotient :

∞ désigne $+\infty$ ou $-\infty$

$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) =$	l	$l\neq 0$	l	∞	∞	0
$\lim\limits_{x\to\alpha} g(x) =$	$l'\neq 0$	0	∞	l	∞	0
$\lim\limits_{x\to\alpha} \frac{f(x)}{g(x)} =$	$\frac{l}{l'}$	∞	0	∞	FI	FI

* $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$ $\quad \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x} = \infty$

Donc on retrouve la forme indéterminée du produit.

☑ *Savoir-faire : Savoir déterminer la limite d'une suite par opération :*

Détermine les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to-\infty} (x-5)(3+x^2)$

* $\lim\limits_{x\to-\infty} x-5 = -\infty$
* $\lim\limits_{x\to-\infty} 3+x^2 = +\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} (x-5)(3+x^2) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to-1} \frac{1}{x+1}$

$\lim\limits_{x\to-1} x+1 = 0$ donc $\lim\limits_{x\to-1} \frac{1}{x+1} = \infty$

* si $x>-1$ $x+1>0$
* si $x<-1$ $x+1<0$

$\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}} \frac{1}{x+1} = +\infty$ $\quad \lim\limits_{\substack{x\to-1\\x<-1}} \frac{1}{x+1} = -\infty$

$\lim\limits_{x\to3} \frac{1-2x}{x-3}$

$\lim\limits_{x\to3} \frac{1-2x}{x-3} = \lim\limits_{x\to3} \frac{-5}{x-3} = \infty$

* $\lim\limits_{\substack{x\to3\\x>3}} \frac{-5}{x-3} = -\infty$ $\quad \left(x>3 \Leftrightarrow x-3>0 \Leftrightarrow \frac{-5}{x-3}<0\right)$
* $\lim\limits_{\substack{x\to3\\x<3}} \frac{-5}{x-3} = +\infty$ $\quad \left(x<3 \Leftrightarrow x-3<0 \Leftrightarrow \frac{-5}{x-3}>0\right)$

☑ *Savoir-faire : Savoir calculer une limite avec une forme indéterminée :*

Déterminer les limites suivantes :

☺ $\lim\limits_{x\to+\infty} -3x^3+2x^2-6x+1$ ☺ $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x^2-5x+1}{6x^2-5}$ ☺ $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{3x^2+2}{4x-1}$ ☺ $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x+1}-\sqrt{x}$

* $\lim\limits_{x\to+\infty} -3x^3+2x^2-6x+1$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} x^3\left(-3+\frac{2}{x}-\frac{6}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} -3x^3 = -\infty$

* $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x^2-5x+1}{6x^2-5}$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x^2}{6x^2}$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

* $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{3x^2+2}{4x-1}$

$= \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{3x^2}{4x}$

$= \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{3}{4}x = -\infty$

$\sqrt{x+1}-\sqrt{x} = \frac{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$

$= \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x+1}+\sqrt{x} = +\infty$

donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x+1}-\sqrt{x} = 0$

Attention on ne peut utiliser cette méthode sur les polynômes et f° rationnelles seulement en $+\infty$ ou en $-\infty$.

V. Asymptotes à une courbe.

Définition :
On dit que la droite d'équation $y = l$ est asymptote horizontale à la courbe représentative de la fonction f en $+\infty$ lorsque f a pour limite l en en $+\infty$ ($\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$.)

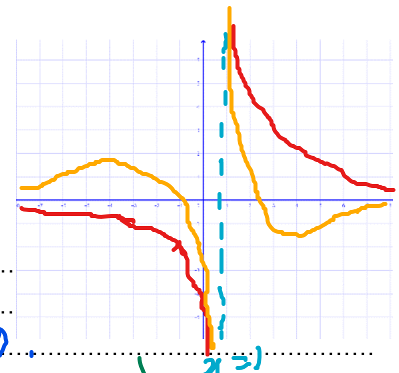
La définition est analogue pour une asymptote horizontale en $-\infty$.

Définition :
On dit que la droite d'équation $x = a$ est asymptote verticale à la courbe représentative de la fonction f lorsque f a pour limite $+\infty$ ou $-\infty$ en a ($\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$)

☑ *Savoir-faire : Savoir déterminer une asymptote :*

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par $f(x) = \frac{-2}{1-x}$

Démontrer que la courbe représentative de la fonction f admet des asymptotes dont on précisera les équations.



$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ Donc C_f admet une asymptote horizontale en $+\infty$: la droite $y = 0$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$ $y = 0$ est aussi asymptote à C_f en $-\infty$.

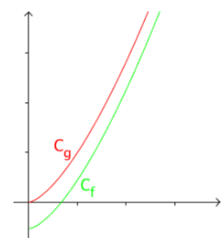
$\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} f(x) = +\infty$ $\left(\begin{matrix} x > 1 \\ 1-x < 0 \end{matrix} \quad \frac{-2}{1-x} > 0\right)$ $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} f(x) = -\infty$ $\left(\begin{matrix} x < 1 \\ 1-x < 0 \end{matrix} \quad \frac{-2}{1-x} > 0\right)$

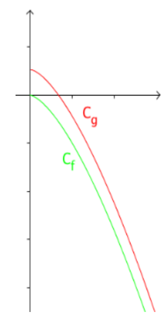
Donc C_f admet la droite $x = 1$ pour asymptote verticale.

VI. Théorèmes de comparaison.

☺ Limite infinie :

Théorème de comparaison :
Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle $]A\,;\,+\infty[$, telles que pour tout $x > A$, on a $f(x) \le g(x)$.
☺ Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$
☺ Si $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

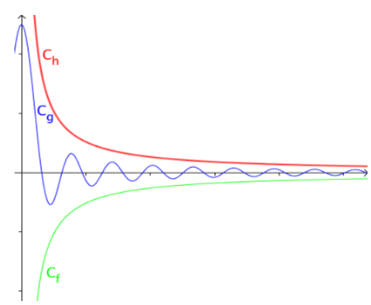




(Le même théorème est vrai en $-\infty$ ou en un nombre a.)

☺ Limite finie :

Théorème des gendarmes :
Soit f, g et h trois fonctions définies sur un intervalle $]A\,;\,+\infty[$, telles que pour tout $x > A$, on a $f(x) \le g(x) \le h(x)$.
Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = l$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = l$.



On obtient un théorème analogue en $-\infty$.

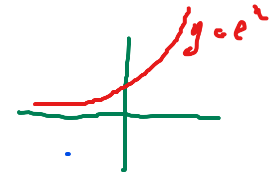
☑ Savoir-faire : Savoir utiliser les théorèmes de comparaison :

Calculer les limites : ☺ $\lim\limits_{x\to+\infty} x+\sin(x)$ ☺ $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x\cos(x)}{x^2+1}$

- $\forall x\in\mathbb{R}$ $-1\leq \sin(x)\leq 1$:
Donc $x+\sin(x)\geq x-1$
$\lim\limits_{x\to+\infty} x-1=+\infty$
Donc d'après le Th de comparaison $\lim\limits_{x\to+\infty} x+\sin(x)=+\infty$

- $\forall x\in\mathbb{R}$, $-1\leq \cos(x)\leq 1$ donc $\frac{-x}{x^2+1}\leq\frac{x\cos(x)}{x^2+1}\leq\frac{x}{x^2+1}$
or $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{x^2+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{x^2}=0$
et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-x}{x^2+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-x}{x^2}=0$
Donc d'après le Th des gendarmes $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x\cos(x)}{x^2+1}=0$

VII. La fonction exponentielle.



Propriété :

☺ $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x =$ $+\infty$ ☺ $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x =$ 0

Démonstration exigible :

Soit f la f° définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=e^x-x$
$f'(x)=e^x-1$
On en déduit le Tableau de variation de f

x	$-\infty$		0		$+\infty$
signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
Variation de $f(x)$		↘	1	↗	

$e^x-1>0$
$\Leftrightarrow e^x>1$
$\Leftrightarrow e^x>e^0$
$\Leftrightarrow x>0$
car exp est croissante
$f(0)=1$

Donc $\forall x\in\mathbb{R}$ $f(x)>0$
Donc $\forall x\in\mathbb{R}$ $e^x-x>0$
Donc $\forall x\in\mathbb{R}$ $e^x>x$
$\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$
Donc d'après le Th de comparaison $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty$

limite en $-\infty$
$\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=\lim\limits_{X\to+\infty} e^{-X}$
$e^{-X}=\frac{1}{e^X}$
$\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=\lim\limits_{X\to+\infty}\frac{1}{e^X}=0$

☺ Croissances comparées :

Théorème des croissances comparées :

☺ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty$ et pour tout entier n, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^n}=+\infty$

☺ $\lim\limits_{x\to-\infty} x\,e^x=0$ et pour tout entier n, $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n\,e^x=0$

Démonstration exigible :

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=e^x-\frac{x^2}{2}$
$f'(x)=e^x-x$
$f''(x)=e^x-1$
En reprenant la méthode précédente on démontre que $f'(x)>0$ $\forall x\in\mathbb{R}$

Donc $f(x)$ est croissante sur $\mathbb{R}$.
$f(0)=1$ Donc $\forall x\geq 0$, $f(x)\geq 0$
donc $\forall x\geq 0$ $e^x\geq\frac{x^2}{2}$
$\Leftrightarrow$ $x>0$ $\frac{e^x}{x}>\frac{x}{2}$

Donc d'après le Th de comparaison $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty$.
$\frac{e^x}{x^n}=\frac{\left(e^{\frac{x}{n}}\right)^n}{x^n}=\left(\frac{e^{\frac{x}{n}}}{x}\right)^n=\left(\frac{1}{n}\times\frac{e^{\frac{x}{n}}}{\frac{x}{n}}\right)^n$
on reconnait la forme $\left(\frac{1}{n}\times\frac{e^X}{X}\right)^n$ avec $X=\frac{x}{n}$
Donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{\frac{x}{n}}}{\frac{x}{n}}=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^n}=+\infty$.

☑ Savoir-faire : Savoir calculer une limite par croissance comparée :

Calculer la limite : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x+x}{e^x-x^2}$

$\frac{e^x+x}{e^x-x^2}=\frac{e^x\left(1+\frac{x}{e^x}\right)}{e^x\left(1-\frac{x^2}{e^x}\right)}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}=0$
$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2}=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^x}=0$

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{x}{e^x}}{1-\frac{x^2}{e^x}}=1$.
Donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x+x}{e^x-x^2}=1$