Équations polynomiales.

Jean Le Rond d'Alembert *(1717-1783) mathématicien, physicien et philosophe français connu pour avoir dirigé l'Encyclopédie propose en 1746 une première démonstration du théorème fondamental de l'algèbre.*

I. Équations du second degré à coefficients réels.

☺ Équations du type $(E): z^2 = a$.

Propriété : Soit a un nombre réel, alors l'équation $(E): z^2 = a$ admet toujours deux solutions dans $\mathbb{C}$.

☺ ………

☺ ………

☺ ………

☺ Équations du type $(E): az^2 + bz + c = 0$.

Définition : Soit a, b et c des réels avec $a \neq 0$.
On appelle discriminant du trinôme $az^2 + bz + c$, le nombre réel, noté Δ, égal à $b^2 - 4ac$.

Propriété : Soit (E) l'équation $(E): az^2 + bz + c = 0$

☺ Si Δ > 0 : L'équation (E) a deux solutions réelles distinctes : $z_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$.

☺ Si Δ = 0 : L'équation (E) a une unique solution réelle : $z_0 = -\frac{b}{2a}$.

☺Si Δ < 0 : L'équation (E) a deux solutions complexes conjuguées : $z_1 = \frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$.

☑ *Savoir-faire : Savoir résoudre une équation du second degré dans C:*

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes : ☺ $(E_1): z^2 + 5 = 0$ ☺ $(E_2): z^2 + 3z + 4 = 0$

………

………

………

………

………

………

Propriété : La somme S et le produit P des solutions de l'équation $(E): az^2 + bz + c = 0$ vérifient :

☺ $S =$ ……………… ☺ $P =$ ………………

………

………

Propriété : *si z_0 est solution d'une équation a coefficient réel alors $\overline{z_0}$ aussi.*

………

………

II. Polynômes de degré n dans $\mathbb{C}$.

☺ Définition.

Définition : Une fonction polynôme (ou polynôme) P est une fonction de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ de la forme $P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n$, où $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ sont les coefficients réels de P.
L'entier n est appelé le degré du polynôme P.

………
………

Propriété : Si une fonction polynôme est nulle, alors tous ses coefficients sont nuls.

………
………

☺ Racines d'un polynôme.

Définition : Soit un polynôme P.
On appelle racine du polynôme P tout nombre complexe z_0 tel que $P(z_0) = 0$.

………
………

II. Factorisation d'un Polynôme.

Définition : On dit qu'un un polynôme P est factorisable (ou divisible) par $(z - a)$ s'il existe un polynôme Q tel que $P(z) = (z - a)Q(z)$.

Propriété : Soient a, b et c des réels avec $a \neq 0$.
Si z_1 et z_2 sont les racines du polynôme $P(z) = az^2 + bz + c$ alors $P(z) = a(z - z_1)(z - z_1)$

………
………
………
………

Théorème : Soit un polynôme P définie par $P(z) = z^n - a^n$ où n est un entier, $n \geq 2$
Alors il existe un polynôme Q de degré $n - 1$, tel que $P(z) = (z - a)Q(z)$

Démonstration exigible :

………
………
………
………
………
………

Théorème : Soit un polynôme P de degré n.
Si a est une racine complexe de P, alors P est factorisable par $(z-a)$.
il existe un polynôme Q de degré $n-1$, tel que $P(z)=(z-a)Q(z)$

Démonstration exigible :

....
....
....
....
....
....

☑ *Savoir-faire : Savoir factoriser un polynôme dont une racine est connue:*

Factoriser dans ℂ le polynôme : $P(z)=z^3+z^2+4z+4$.

....
....
....
....
....
....

☑ *Savoir-faire : Savoir résoudre une équation de degré 3 dont une racine est connue :*

Résoudre dans R l'équation $(E): x^3+x^2-3x+1=0$

....
....
....
....
....
....

Théorème Fondamental de l'algébre :
Un polynôme P non nul de degré n , admet au plus n racines .

Démonstration exigible :

....
....
....
....
....
....
....
....
....