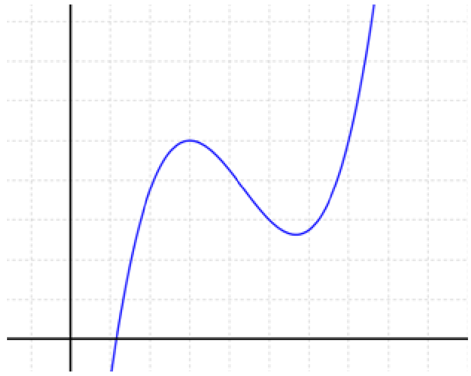
II. Théorème des valeurs intermédiaires.

Théoreme des valeurs intermediaires (admis)

On considère une fonction f définie et continue sur un intervalle $[a\ ;\ b]$.
Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel c compris entre a et b tel que $f(c) = k$

Conséquence :
Dans ces conditions, l'équation $f(x) = k$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[a\ ;\ b]$.
Cas particuliers :
- Dans le cas où la fonction f est strictement monotone sur l'intervalle $[a\ ;\ b]$ alors le réel c est unique.
- Dans le cas où $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires alors il existe au moins un réel c compris entre a et b tel que $f(c) = 0$.



Théorème des valeurs intermédiaires

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle $[a\ ;\ b]$. *Pour tout nombre réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$,* l'équation $f(x)= k$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[a\ ;\ b]$.

☑*Savoir faire : Savoir prouver l'existence d'au moins une solution d'une équation de la forme $f(x)= k$:*

On considère la fonction f définie sur IR par $f(x) = x^3 - 9x^2 + 26x - 25$.

Montrer que l'équation (E) : $f(x)= -1$ *admet au moins une solution sur [1 ; 5].*

....

....

....

....

Remarque 1 :
La continuité de la fonction f est une hypothèse essentielle du théorème. Si la fonction f n'est pas continue, il est possible que pour un réel k compris entre f(a) et f(b), il n'existe aucun réel c compris entre a et b tel que f(c) = k.

Théorème des valeurs intermédiaires et solution unique

Soit f une fonction définie, continue et strictement monotone *sur un intervalle* $[a\ ;\ b]$. *Pour tout nombre réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$,* l'équation $f(x)= k$ admet une unique solution dans l'intervalle $[a\ ;\ b]$.

☑*Savoir faire : Savoir prouver l'existence d'une unique solution d'une équation de la forme $f(x)= k$:*

On considère la fonction f définie sur IR par $f(x) = x^3 + x$.

Montrer que l'équation (E) : $f(x)= 5$ admet une unique solution sur [1 ; 2].

....

....

....

....

....

....

....

....