

## EXERCICE 4

5 points

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Un pisciculteur dispose de deux bassins A et B pour l'élevage de ses poissons. Tous les ans à la même période :

- il vide le bassin B et vend tous les poissons qu'il contenait et transfère tous les poissons du bassin A dans le bassin B ;
- la vente de chaque poisson permet l'achat de deux petits poissons destinés au bassin A.

Par ailleurs, le pisciculteur achète en plus 200 poissons pour le bassin A et 100 poissons pour le bassin B.

Pour tout entier naturel supérieur ou égal à 1, on note respectivement  $a_n$  et  $b_n$  les effectifs de poissons des bassins A et B au bout de  $n$  années.

En début de première année, le nombre de poissons du bassin A est  $a_0 = 200$  et celui du bassin B est  $b_0 = 100$ .

1. Justifier que  $a_1 = 400$  et  $b_1 = 300$  puis calculer  $a_2$  et  $b_2$ .

2. On désigne par  $A$  et  $B$  les matrices telles que  $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} 200 \\ 100 \end{pmatrix}$  et pour

tout entier naturel  $n$ , on pose  $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$ .

a. Expliquer pourquoi pour tout entier naturel  $n$ ,  $X_{n+1} = AX_n + B$ .

b. Déterminer les réels  $x$  et  $y$  tels que  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + B$ .

c. Pour tout entier naturel  $n$ , on pose  $Y_n = \begin{pmatrix} a_n + 400 \\ b_n + 300 \end{pmatrix}$ .

Démontrer que pour tout entier naturel  $n$ ,  $Y_{n+1} = AY_n$ .

3. Pour tout entier naturel  $n$ , on pose  $Z_n = Y_{2n}$ .

a. Démontrer que pour tout entier naturel  $n$ ,  $Z_{n+1} = A^2 Z_n$ . En déduire que pour tout entier naturel  $n$ ,  $Z_{n+1} = 2Z_n$ .

b. On admet que cette relation de récurrence permet de conclure que pour tout entier naturel  $n$ ,

$$Y_{2n} = 2^n Y_0.$$

En déduire que  $Y_{2n+1} = 2^n Y_1$  puis démontrer que pour tout entier naturel  $n$ ,

$$a_{2n} = 600 \times 2^n - 400 \quad \text{et} \quad a_{2n+1} = 800 \times 2^n - 400.$$

4. Le bassin A a une capacité limitée à 10 000 poissons.

a. On donne l'algorithme suivant.

Que fait cet algorithme? Justifier la réponse.

b. Écrire un algorithme qui affiche le nombre d'années pendant lesquelles le pisciculteur pourra utiliser le bassin A.

Variables :	$a, p$ et $n$ sont des entiers naturels.
Initialisation :	Demander à l'utilisateur la valeur de $p$ .
Traitement :	Si $p$ est pair <ul style="list-style-type: none"> <li>Affecter à <math>n</math> la valeur <math>\frac{p}{2}</math></li> <li>Affecter à <math>a</math> la valeur <math>600 \times 2^n - 400</math>.</li> </ul> Sinon <ul style="list-style-type: none"> <li>Affecter à <math>n</math> la valeur <math>\frac{p-1}{2}</math></li> <li>Affecter à <math>a</math> la valeur <math>800 \times 2^n - 400</math>.</li> </ul> Fin de Si.
Sortie :	Afficher $a$ .