42

BacS Antilles-Guyane septembre 2014

EXERCICE 2 — 6 points

Partie A

On considère la fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = x\mathrm{e}^{-x}.$$

1. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
2. Déterminer la dérivée f' de la fonction f sur $[0\,;\,+\infty[$ et en déduire le tableau de variations de f sur $[0\,;\,+\infty[$.

On donne en **annexe** la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f dans un repère du plan. La droite Δ d'équation $y = x$ a aussi été tracée.

Partie B

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Placer sur le graphique donné en **annexe**, en utilisant la courbe $\mathscr{C}_f$ et la droite Δ, les points A_0, A_1 et A_2 d'ordonnées nulles et d'abscisses respectives u_0, u_1 et u_2. Laisser les tracés explicatifs apparents.
2. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n > 0$.
3. Montrer que la suite (u_n) est décroissante.
4. **a.** Montrer que la suite (u_n) est convergente.

   b. On admet que la limite de la suite (u_n) est solution de l'équation $x\mathrm{e}^{-x} = x$. Résoudre cette équation pour déterminer la valeur de cette limite.

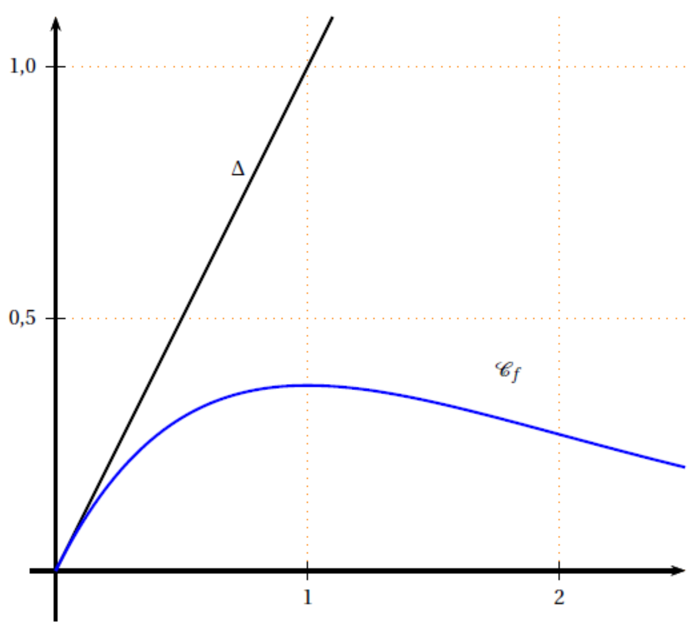
Partie C

On considère la suite (S_n) définie pour tout entier naturel n par

$$S_n = \sum_{k=0}^{k=n} u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_n.$$

Compléter l'algorithme donné en **annexe** afin qu'il calcule S_{100}. *

Partie B - Question 1



Partie C

Déclaration des variables :
S et u sont des nombres réels
k est un nombre entier
Initialisation :
u prend la valeur ......
S prend la valeur ......
Traitement :
Pour k variant de 1 à ....
u prend la valeur $u \times \mathrm{e}^{-u}$
S prend la valeur ....
Fin Pour
Afficher ......