

EXERCICE 4

5 points

Réservé aux candidats ayant suivi la spécialité

Dans une ville, une enseigne de banque nationale possède deux agences, appelées X et Y.

D'une année sur l'autre, une partie des fonds de l'agence X est transférée à l'agence Y, et réciproquement. De plus, chaque année, le siège de la banque transfère une certaine somme à chaque agence.

Soit n un entier naturel. On note x_n la quantité de fonds détenue par l'agence X, et y_n la quantité de fonds détenue par l'agence Y au 1^{er} janvier de l'année 2014 + n , exprimées en millions d'euros.

On note U_n la matrice $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ et on note $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On suppose que le 1^{er} janvier de l'année 2014, l'agence X possède 50 millions d'euros et l'agence Y possède 10 millions d'euros.

L'évolution de la quantité de fonds est régie par la relation suivante :

$$U_{n+1} = AU_n + B, \text{ où } A = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,15 \\ 0,2 & 0,4 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

- Interpréter dans le contexte de l'exercice le coefficient 0,6 de la matrice A et le coefficient 3 de la matrice B .
- Donner la matrice U_0 puis calculer la quantité de fonds détenue par chacune des agences X et Y en 2015, exprimée en millions d'euros.
- On note $D = \begin{pmatrix} 0,3 & 0 \\ 0 & 0,7 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} 0,25 & -0,375 \\ 0,25 & 0,125 \end{pmatrix}$.
 - Donner sans détailler le calcul, la matrice PDQ .
 - Expliciter le calcul du coefficient de la première ligne et de la deuxième colonne du produit matriciel QP . Dans la suite, on admettra que $QP = I$.

On admettra dans la suite de cet exercice que pour tout entier naturel non nul n ,

$$A^n = PD^nQ.$$

- On pose pour tout entier naturel n , $V_n = U_n - \begin{pmatrix} 5 \\ 20/3 \end{pmatrix}$.
 - Démontrer que pour tout entier naturel n , $V_{n+1} = AV_n$.
 - Déterminer V_0 puis pour tout entier naturel n , donner l'expression de V_n en fonction de A , n et V_0 .
- Soit n un entier naturel. On admet que

$$A^n = \begin{pmatrix} 0,25 \times 0,3^n + 0,75 \times 0,7^n & 0,375(-0,3^n + 0,7^n) \\ 0,5(-0,3^n + 0,7^n) & 0,75 \times 0,3^n + 0,25 \times 0,7^n \end{pmatrix}.$$

- Déterminer le coefficient de la première ligne de la matrice V_n en détaillant les calculs.
- En déduire l'expression de x_n en fonction de n .
- Déterminer la limite de x_n quand n tend vers $+\infty$ et interpréter ce résultat dans le cadre du problème.