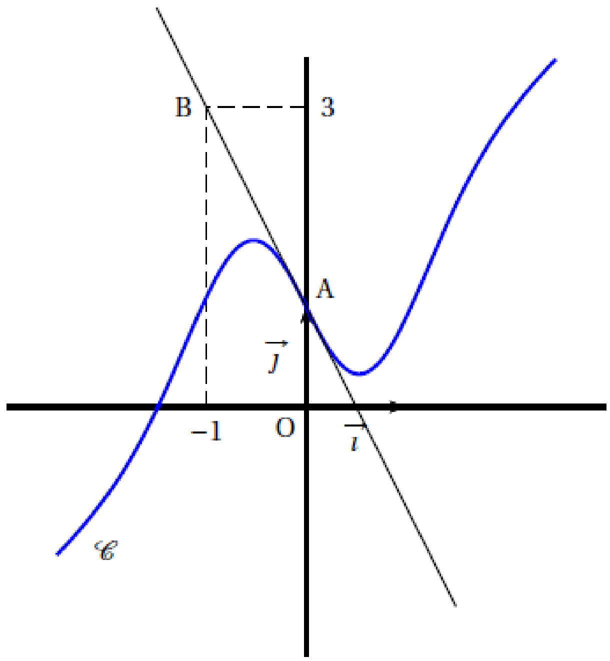
BacS Métropole 11 septembre 2014

EXERCICE 1 — 5 points

Sur le graphique ci-dessous, on a tracé, dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, une courbe $\mathscr{C}$ et la droite (AB) où A et B sont les points de coordonnées respectives $(0\,;1)$ et $(-1\,;3)$.



On désigne par f la fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ dont la courbe représentative est $\mathscr{C}$.
On suppose, de plus, qu'il existe un réel a tel que pour tout réel x,

$$f(x) = x + 1 + axe^{-x^2}.$$

1. **a.** Justifier que la courbe $\mathscr{C}$ passe par le point A.

   b. Déterminer le coefficient directeur de la droite (AB).

   c. Démontrer que pour tout réel x,

   $$f'(x) = 1 - a\left(2x^2 - 1\right)e^{-x^2}.$$

   d. On suppose que la droite (AB) est tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point A.
   Déterminer la valeur du réel a.

2. D'après la question précédente, pour tout réel x,

   $$f(x) = x + 1 - 3xe^{-x^2} \quad \text{et} \quad f'(x) = 1 + 3\left(2x^2 - 1\right)e^{-x^2}.$$

   a. Démontrer que pour tout réel x de l'intervalle $]-1\,;0]$, $f(x) > 0$.

   b. Démontrer que pour tout réel x inférieur ou égal à -1, $f'(x) > 0$.

   c. Démontrer qu'il existe un unique réel c de l'intervalle $\left[-\frac{3}{2}\,;-1\right]$ tel que $f(c) = 0$.
   Justifier que $c < -\frac{3}{2} + 2.10^{-2}$.

3. On désigne par $\mathscr{A}$ l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine défini par :

   $$c \leqslant x \leqslant 0 \quad \text{et} \quad 0 \leqslant y \leqslant f(x).$$

   a. Écrire $\mathscr{A}$ sous la forme d'une intégrale.

   b. On admet que l'intégrale $I = \int_{-\frac{3}{2}}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x$ est une valeur approchée de $\mathscr{A}$ à 10^{-3} près.
   Calculer la valeur exacte de l'intégrale I.