Divisibilité et congruences.

Pierre de Fermat *(1601-1665) magistrat et mathématicien « amateur » français. Il est notamment célébre pour avoir énoncé le Théorème de Fermat*

I. Divisibilité dans $\mathbb{Z}$.

$\mathbb{N}$ est l'ensemble des entiers naturels, $\mathbb{Z}$ est l'ensemble des entiers relatifs.

Définition : Soit a et b deux entiers relatifs.
On dit que a divise b ou que a est un diviseur de b, s'il existe un entier relatif k tel que $b = k\,a$.
On dit également que b est un multiple de a.

Exemples :

☺ 56 est un multiple de –8 car 56 =.............................

☺ 5 L'ensemble des multiples de 5 sont {… ; –15 ; –10 ; –5 ; 0 ; 5 ; 10 ; …}. On note cet ensemble ....

☺ 0 est ....

Propriété : Soit a, b et c trois entiers relatifs.
Si a divise b et b divise c alors a divise c.

Démonstration

....

....

....

Exemples :

....

Propriété : Soit a, b et c trois entiers relatifs.
Si c divise a et b alors c divise ma + nb où m et n sont deux entiers relatifs.

Démonstration

....

....

....

Exemple :

Soit un entier relatif N qui divise les entiers relatifs n et $n + 1$.

....

Propriété :
Tout entier relatif non nul n possède un nombre fini de diviseurs compris entre –n et n.

....

....

II. Division euclidienne.

Propriété : Soit a un entier naturel et b entier naturel non nul.
Il existe un unique couple d'entiers $(q\ ;\ r)$ tel que $a = bq + r$ avec $0 \leq r < b$.
q est le quotient et r est appelé le reste dans la division euclidienne de a par b.

Exemples :

....

....

☑*Savoir-faire : Savoir déterminer le quotient et le reste d'une division euclidienne :*

Déterminer le quotient et le reste de la division de –5000 par 17.

....

....

....

Propriété : Soit a un entier naturel et b entier naturel non nul.
b divise a si et seulement si le reste de la division euclidienne de a par b est nul.

Exemples :

....

....

Propriété : Soit b entier naturel supérieur ou égal à 2.
Tout entier relatif peut s'écrire sous l'une des formes suivantes : bq , $bq + 1$, ... $bq + (b - 1)$
où q est un entier relatif.

Exemples :

Prouve que $n^2 + 1$ (n entier relatif) n' est jamais divisible par 3.

....

....

....

....

....

III. Congruence dans $\mathbb{Z}$.

Définition : Soit n un entier naturel non nul.
Deux entiers a et b sont congrus modulo n lorsque $a - b$ est divisible par n.
On note $a \equiv b\ [n]$.

Exemples :

....

....

....

Propriété : Soit n un entier naturel non nul.
Deux entiers a et b sont congrus modulo n, si et seulement si, a et b ont le même reste dans la division euclidienne par n.

Exemples :
....
....

Propriété : Soit n un entier naturel non nul.
☺ $a \equiv 0\ [n]$ si et seulement si ....
☺ $a \equiv a[n]$, pour tout entier relatif a.
☺ r est le reste dans la division euclidienne de a par $n \Leftrightarrow$ .... et ....
☺ Si $a \equiv b[n]$ et $b \equiv c[n]$ alors ....(Relation de transitivité)

Exemples :
....
....
....

Propriété : Soit n un entier naturel non nul.
Soit a, b, a' et b' des nombres relatifs tels que $a \equiv b[n]$ et $a' \equiv b'[n]$ alors on a :
☺ $a + a' \equiv b + b'[n]$
☺ $a - a' \equiv b - b'[n]$
☺ $a \times a' \equiv b \times b'\ [n]$
☺ $a^p \equiv b^p[n]$ avec $p \in \mathbb{N}$.

☑*Savoir-faire : Savoir déterminer le reste d'une division euclidienne à l'aide de congruences :*

☺ Déterminer le reste de la division de 2^{456} par 5.
☺ Déterminer le reste de la division de 2^{437} par 7.
....
....
....
....
....

☑*Savoir-faire : Savoir résoudre une équation avec des congruences :*

☺ Déterminer les entiers x tels que $6 + x \equiv 5\ [3]$
☺ Déterminer les entiers x tels que $3\,x \equiv 5\ [4]$
....
....
....
....
....