Équations, inéquations, systèmes.

Muhammad Al-Khwârizmi (780 ; 850) Son livre «sur la science de la transposition et de la réduction » qui traite de résolution d'équations est considéré comme le premier traité d'algèbre .

I. Équations.

☺ Propriétés des égalités.

Propriété : Soit a,b,c trois nombres réels et d et e des nombres non nul.

♦ $a = b \Leftrightarrow a + c = b + c.$ ♦ $a = b \Leftrightarrow a \times d = b \times d.$ ♦ $\frac{a}{d} = \frac{b}{e} \Leftrightarrow a \times e = b \times d.$

☺ Équations.

Définition : Une équation d'inconnue x est une question dans laquelle intervient un nombre inconnu x.
Résoudre une équation dans un ensemble, c'est déterminer toutes les valeurs de x de cet ensemble qui rendent l'égalité vraie. Ces valeurs sont appelées les solutions de l'équation.

Définition : On dit que deux équations sont équivalentes lorsqu'elles ont les mêmes solutions
On le note avec le symbole « $\Leftrightarrow$ ».

☺ Degré d'une équation.

Définition : On appelle degré d'une équation le plus grand exposant porté par l'inconnue.

Exemples : $(E_1): 2x^3-5x^2+3x+1$ est une équation du 3^{e} degré
$(E_2): 2x+4=5x-2$ 1^{er} degré $(E_3): (3x+4)(2x-5)$: $2^{ième}$ degré

II. Résolution d'équations.

☺ Équations du premier degré.

Propriété : Toute équation du premier degré est équivalente à une équation de la forme $(E): ax = b$.

☑ *Savoir-faire : Savoir résoudre une équation du premier degré.*

Résoudre l'équation $(E_1) : 2x - 10 = 5x + 2$.

$(E_1) \Leftrightarrow 2x-5x = 10+2$
$(E_1) \Leftrightarrow -3x = 12$
$(E_1) \Leftrightarrow x = \frac{12}{-3} = -4$

Donc l'équation (E_1) a une solution qui est -4
$S(E_1) = \{-4\}$.

☺ Équations du type produit nul.

Phrase magique : Un produit est nul si et seulement si au moins un des facteurs est nul

☑ *Savoir-faire : Savoir résoudre une équation du type produit nul.*

Résoudre les équations $(E_2) : (2x + 3)(4x - 8) = 0$ et $(E_3) : 5x^2 - 3x = 0$

$(E_2): (2x+3)(4x-8)=0$
PPN: $2x+3=0$ ou $4x-8=0$
$x=-\frac{3}{2}$ ou $x=2$
$S(E_2)=\{-\frac{3}{2} ; 2\}$

$(E_3) \Leftrightarrow x(5x-3)=0$
PPN $x=0$ ou $5x-3=0$
$x=0$ ou $x=\frac{3}{5}$
$S(E_3)=\{0 ; \frac{3}{5}\}$.

Remarque : ne pas confondre { } et [ ]. ce n'est pas un intervalle !!

☺ Équations du type $(E): x^2 = a$.

Propriété : Les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $(E) : x^2 = a$ dépendent du signe de a.

- ♦ Si $a < 0$, l'équation $(E): x^2=a$ n'a pas de solution, le carré d'un nombre réel est positif : $S(E)=\emptyset$
- ♦ Si $a = 0$, l'équation $(E): x^2=a$ a une solution 0. $S(E)=\{0\}$
- ♦ Si $a > 0$, l'équation $(E): x^2=a$ a deux solutions $S(E)=\{-\sqrt{a};\sqrt{a}\}$

Démonstration : $(E): x^2=a$ $(E) \Leftrightarrow x^2-a=0$ $\boxed{\text{si } a>0}$ alors $(E) \Leftrightarrow x^2-\sqrt{a}^2=0$
donc $(E) \Leftrightarrow (x-\sqrt{a})(x+\sqrt{a})=0$ Donc $S(E)=\{-\sqrt{a};\sqrt{a}\}$.

☑ *Savoir-faire : Savoir résoudre une équation du type $(E) : x^2 = a$.*

Résoudre les équations $(E_4) : x^2 = 16$; $(E_5) : x^2 = -8$ et $(E_6) : (x+2)^2 = 9$.

$S(E_4)=\{-4;4\}$ $S(E_5)=\emptyset$ $(E_6) \Leftrightarrow x+2=3$ ou $x+2=-3$
$x=1$ ou $x=-5$
$S(E_6)=\{-5;1\}$.

☺ Équations quotients $(E): \frac{P(x)}{Q(x)} = 0$.

Propriété : Les solutions de l'équation $(E): \frac{P(x)}{Q(x)} = 0$ sont les solutions de l'équation $P(x) = 0$ qui n'annule pas $Q(x)$.

☑ *Savoir-faire : Savoir résoudre une équation quotient.*

Résoudre les équations $(E_7) : \frac{3x+5}{x-1} = 0$; $(E_8) : \frac{x^2-9}{x+3} = 0$ et $(E_9) : 1 - \frac{x+3}{x-3} = \frac{2}{2-x}$.

$(E_7) \Leftrightarrow 3x+5=0$ et $x-1\neq 0$
$(E_7) \Leftrightarrow x=\frac{-5}{3}$ et $x\neq 1$
Donc $S(E_7)=\{\frac{-3}{5}\}$

$(E_8) \Leftrightarrow x^2-9=0$ et $x+3\neq 0$
$(E_8) \Leftrightarrow x=3$ ou $x=-3$ et $x\neq -3$
$S(E_8)=\{3\}$

(E_9) est définie pour $x\neq 3$ et $x\neq 2$.
On réduit au même dénominateur.
$(E_9) \Leftrightarrow \frac{(x-3)(2-x)}{(x-3)(2-x)} - \frac{(x+3)(2-x)}{(x-3)(2-x)} - \frac{2(x-3)}{(x-3)(2-x)}=0$
$(E_9) \Leftrightarrow \frac{2x-x^2-6+3x-(2x-x^2+6-3x)-2x+6}{(x-3)(2-x)}=0$
$(E_9) \Leftrightarrow \frac{4x-6}{(x-3)(2-x)}=0$ $S(E_9)=\{\frac{3}{2}\}$

III. Inéquations.

☺ Propriétés des égalités.

Propriété : Soit a,b,c trois nombres réels et d un nombre non nul.
♦ $a < b \Leftrightarrow a + c < b + c$. ♦ Si $d > 0$, $a < b \Leftrightarrow a \times d < b \times d$. ♦ Si $d < 0$, $a < b \Leftrightarrow a \times d < b \times d$.

Propriété : Soit a,b,c et d quatre nombres réels.
Si $a < b$ et $c < d$ alors $a + c < b + d$.

☺ Inéquations.

Définition : Une inéquation est une inégalité qui contient une inconnue x. Résoudre une inéquation, c'est trouver toutes les valeurs de x qui vérifient cette inégalité. Il s'agit d'un ensemble de valeurs.

☑ *Savoir-faire : Savoir résoudre une inéquation du premier degré.*

Résoudre l'équation $(I_1) : 2x + 3 < 5x + 4$.

$(I_1) \Leftrightarrow 2x-5x < -3+4$
$(I_1) \Leftrightarrow -3x < 1$
$(I_1) \Leftrightarrow x > \frac{1}{-3}$ (car $-3<0$)
$(I_1) \Leftrightarrow x > \frac{-1}{3}$

$S(I_1)=]-\frac{1}{3};+\infty[$.