## IV. Système de 2 équations à 2 inconnues.

### ☺ Équations à deux inconnues.

Une équation à deux inconnues est de la forme $(E) : ax + by = c$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Une solution d'une équation à deux inconnues comporte une valeur pour la première inconnue et une valeur pour la deuxième, on la présente sous la forme d'un couple ;

Exemple : On considère l'équation $(E) : 3x + 5y = \boxed{-1}$. Le couple $(-2 ; 1)$ est une solution de $(E)$.

$3 \times (-2) + 5 \times 1 = -6 + 5 = \boxed{-1}$

$\Rightarrow$ il existe une infinité de couples solutions d'une équation à 2 inconnues.

$\left(0 ; -\frac{1}{5}\right)$ $\left(1 ; -\frac{4}{5}\right)$ $\left(2 ; -\frac{7}{5}\right)$ ...

### ☺ Systèmes de 2 équations à 2 inconnues.

**Définition :**

Un système de deux équations à deux inconnues peut s'écrire sous la forme $(S) : \begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$,

avec $a, b, c, a', b', c'$ qui sont des nombres réels donnés.

Une solution du système est un couple qui est solution des deux équations.

Résoudre un système c'est trouver tous les couples solutions du système.

☑ *Savoir-faire : Savoir vérifier qu'un couple est solution d'un système.*

Soit $(S) : \begin{cases} 2x + 3y = \boxed{7} & (E_1) \\ -3x + 2y = \boxed{9} & (E_2) \end{cases}$ Montre que $(-1 ; 3)$ est une solution de $(S)$.

* $2 \times (-1) + 3 \times 3 = -2 + 9 = \boxed{7}$ donc le couple $(-1;3)$ est solution de $(E_1)$

* $-3 \times (-1) + 2 \times 3 = 3 + 6 = \boxed{9}$ donc le couple $(-1;3)$ est solution de $(E_2)$

Donc le couple $(-1 ; 3)$ est une solution du système $(S)$.

### ☺ Résoudre un système par substitution.

Méthode : "Substituer" signifie remplacer ;

On exprime une inconnue en fonction de l'autre dans une équation et on substitue la valeur de cette inconnue dans l'autre équation.

☑ *Savoir-faire : Savoir résoudre un système par substitution.*

Résoudre le système (S) : $\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 1x + 2y = 3 \end{cases}$.

On choisit la 2ème équation dans laquelle le coefficient de $x$ est égal à 1

$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ x = -2y + 3 \end{cases}$

On substitue la valeur de $x$ dans la première équation.

$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} 2(-2y+3) + 3y = 1 \\ x = -2y + 3 \end{cases}$

$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} -4y + 6 + 3y = 1 \\ x = -2y + 3 \end{cases}$

$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} -y = -5 \\ x = -2y + 3 \end{cases}$

$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{y} = \boxed{5} \\ x = -2 \times 5 + 3 \end{cases}$

$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{y = 5} \\ \boxed{x = -7} \end{cases}$

On vérifie :

$2 \times (-7) + 3 \times 5 = -14 + 15 = 1$

$-7 + 2 \times 5 = -7 + 10 = 3$

Donc le système a une unique solution qui est le couple $(-7 ; 5)$

☺ Résoudre un système par combinaison linéaire.

Méthode : On ne change pas les solutions d'un système si on multiplie une ligne par un nombre ou si on ajoute des lignes. L'objectif est de multiplier les lignes pour faire apparaître un nombre opposé d'une inconnue pour qu'elle disparaisse lorsqu'on va ajouter les lignes.

☑ *Savoir-faire : Savoir résoudre un système par combinaison linéaire.*

Résoudre le système (S) : $\begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ 5x + 3y = 2 \end{cases}$

On choisit de faire apparaître un nombre opposé de y
On multiplie la première équation par 3
On multiplie la deuxième équation par 2.

Coefficient (S) $\Leftrightarrow \begin{cases} 9x \boxed{-6} y = 15 \\ 10x \boxed{+6} y = 4 \end{cases}$

En ajoutant les 2 lignes on obtient (S) $\Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{19x = 19} \\ 3x + 2y = 5 \end{cases}$

On choisit une autre équation pour que le système en ait 2

Donc (S) $\Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{x} = \frac{19}{19} = \boxed{1} \\ 5 \times 1 + 2y = 2 \end{cases}$

(S) $\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ 2y = -5 + 3 \end{cases}$

(S) $\Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{x = 1} \\ \boxed{y = -1} \end{cases}$

On vérifie : $3 \times 1 - 2 \times (-1) = 5$
$5 \times 1 + 3 \times (-1) = 2$

Donc (S) a une unique solution qui est le couple $(1 ; -1)$.

☺ Application à la résolution de problèmes.

☑ *Savoir-faire : Savoir utiliser un système d'équations pour résoudre un problème à deux inconnues :*

Dans une boulangerie, Fabien achète 3 pains au chocolat et 2 croissants. Il paie 5,60 €. (1)
Dans la même boulangerie, Bob achète 1 pain au chocolat et 3 croissants. Il paie 4,20 €. (2)
Calculer le prix d'un pain au chocolat et d'un croissant.

1. On définit les inconnues : Soit $x$ le prix d'un pain au chocolat.
Soit $y$ le prix d'un croissant.

2. On traduit les phrases en équations
(1) $\Leftrightarrow 3x + 2y = 5,6$
(2) $\Leftrightarrow x + 3y = 4,2$

3. On résout le système.

(S) $\Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 2y = 5,6 \\ x + 3y = 4,2 \end{cases}$

(S) $\Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 2y = 5,6 \\ -3x - 9y = -12,6 \end{cases}$

(S) $\Leftrightarrow \begin{cases} -7y = -7 \\ x + 3y = 4,2 \end{cases}$

(S) $\Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{y} = \frac{-7}{-7} = \boxed{1} \\ \boxed{x} = -3 \times 1 + 4,2 = \boxed{1,2} \end{cases}$

On vérifie :
$3 \times 1,2 + 2 \times 1 = 3,6 + 2 = 5,6$
$1,2 + 3 \times 1 = 1,2 + 3 = 4,2$ OK

Donc le système a une unique solution qui est le couple $(1,2 ; 1)$

4. On revient au pb pour conclure

Donc le prix d'un pain est 1,20 €
le prix d'un croissant est 1 €