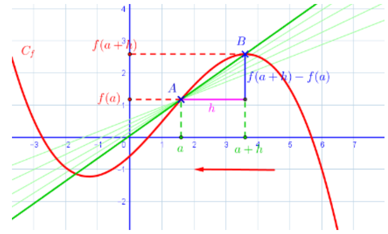
Rappels sur la dérivation.

Joseph Louis Lagrange (1736 ; 1813) *introduit le mot « dérivé » pour signifier que cette nouvelle fonction dérive (au sens de "provenir") d'une autre fonction.*

I. Nombre dérivé, fonction dérivée.



Définition : Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a un réel appartenant à I.
On dit que f est dérivable en a s'il existe un nombre égal à $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$.
On appelle ce nombre, le nombre *le nombre dérivé de f en a et on le note $f'(a)$*.

Définition : Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On dit que f est dérivable sur I si elle est dérivable en tout réel x de I. Dans ce cas, la fonction qui à tout réel x de I associe le nombre dérivé de f en x est appelée fonction dérivée de f et se note f'. $f' : x \to f'(x)$.

II. Opérations sur les fonctions dérivées.

☺ Fonctions dérivées des fonctions de référence

Propriétés :

- $f : x \to k$, $(\forall\, k \in \mathbb{R})$ *définie sur* ... $\mathbb{R}$ ... *est dérivable sur* ... $\mathbb{R}$ ... *et* ... $f' : x \longmapsto 0$ ...
- $f : x \to mx$, $(\forall\, m \in \mathbb{R})$ *définie sur* ... $\mathbb{R}$ ... *est dérivable sur* ... $\mathbb{R}$ ... *et* ... $f' : x \longmapsto m$ ...
- $f : x \to x^n$, $(\forall\, n \in \mathbb{N}^*)$ *définie sur* ... $\mathbb{R}$ ... *est dérivable sur* ... $\mathbb{R}$ ... *et* ... $f' : x \longmapsto n x^{n-1}$ ...
- $f : x \to \frac{1}{x}$ *définie sur* ... $\mathbb{R}^*$ ... *est dérivable sur* ... $\mathbb{R}^*$ ... *et* ... $f' : x \longmapsto -\frac{1}{x^2}$ ...
- $f : x \to \frac{1}{x^n}$ $(\forall\, n \in \mathbb{N}^*)$ *définie sur* ... $\mathbb{R}^*$ ... *est dérivable sur* ... $\mathbb{R}^*$ ... *et* ... $f' : x \longmapsto \frac{-n}{x^{n+1}}$ ...
- $f : x \to \sqrt{x}$, *définie sur* $\mathbb{R}_+ = [0\,;+\infty[$ *est dérivable sur* $\mathbb{R}_+^* =]0\,;+\infty[$ *et* ... $f' : x \longmapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$ ...
- $f : x \to e^x$ *définie sur* ... $\mathbb{R}$ ... *est dérivable sur* ... $\mathbb{R}$ ... *et* ... $f' : x \longmapsto e^x$ ...
- $f : x \to e^{kx}$ *définie sur* ... $\mathbb{R}$ ... *est dérivable sur* ... $\mathbb{R}$ ... *et* ... $f' : x \longmapsto k e^{kx}$ ...

☺ Opérations sur les fonctions dérivées

Propriétés : Soient u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I.

☺ $u + v$ *est dérivable sur* I *et* $(u+v)' =$ ... $u' + v'$ ...

☺ ku $(\forall\, k \in \mathbb{R})$ *est dérivable sur* I *et* $(ku)' =$ ... $k \times u'$ ...

☺ $u \times v$ *est dérivable sur* I *et* $(u \times v)' =$ ... $u' \times v + v' \times u$ ...

☺ $\frac{1}{u}$ *est dérivable sur* I où u ne s'annule pas sur I *et* $\left(\frac{1}{u}\right)' =$ ... $\frac{-u'}{u^2}$ ...

☺ $\frac{u}{v}$ *est dérivable sur* I où v ne s'annule pas sur I *et* $\left(\frac{u}{v}\right)' =$ ... $\frac{u'v - v'u}{v^2}$ ...

III. Application à l'étude des variations d'une fonction.

Propriété (admise) : Soit une fonction f définie et dérivable sur un intervalle I.

☺ Si $\forall\, x \in \mathrm{I}\,, f'(x) \leq 0$, alors f est décroissante

☺ Si $\forall\, x \in \mathrm{I}\,, f'(x) \geq 0$, alors f est croissante

☺ Si $\exists x_0$ *tel que* $f'(x_0) = 0$ et change de signes alors f admet un extremum local en x_0

☑ *Savoir-faire : Savoir étudier une fonction polynôme du 3° degré :*

Étudie la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 4$.

$f'(x) = 6x^2 + 6x - 12 = 6(x^2 + x - 2)$

On pose $(E) : f'(x) = 0$

$S(E) = \{-2 ; 1\}$

$a > 0$

$f(-2) = 24$ $\qquad$ $f(1) = -3$

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
Signes de $f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
Variations de f		↗	24	↘	-3	↗	

☑ *Savoir-faire : Savoir étudier une fonction rationnelle :*

Étudie la fonction f définie par $f(x) = \frac{x+1}{x^2 - 2x}$

$f(x) = \frac{x+1}{x(x-2)}$ $\qquad$ $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0 ; 2\} =]-\infty ; 0[\cup]0 ; 2[\cup]2 ; +\infty[$

$f = \frac{u}{v}$ avec $u(x) = x + 1$ $\qquad$ $v(x) = x^2 - 2x$

$f' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$ avec $u'(x) = 1$ $\qquad$ $v'(x) = 2x - 2$

Donc $f'(x) = \frac{1 \times (x^2 - 2x) - (x+1)(2x-2)}{(x^2 - 2x)^2} = \frac{x^2 - 2x - 2x^2 + 2x - 2x + 2}{(x^2 - 2x)^2} = \frac{-x^2 - 2x + 2}{(x^2 - 2x)^2}$

On pose $(E) : f'(x) = 0$ $\quad \Delta = 12$ $\quad \Delta > 0$ Donc $-x^2 - 2x + 2 = 0$ a 2 solutions : $S = \{-1 - \sqrt{3} ; -1 + \sqrt{3}\}$

x	$-\infty$		$-1-\sqrt{3}$		0		$-1+\sqrt{3}$		2		$+\infty$
Signes de $f'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$	‖	$-$	
Variations de f		↘		↗	‖	↗		↘	‖	↘	

☑ *Savoir-faire : Savoir étudier une fonction avec une exponentielle :*

Étudie la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x + 2)e^x$.

$f = u \times v$ avec $u(x) = x + 2$ $\quad v(x) = e^x$

Donc $f' = u'v + v'u$ avec $u'(x) = 1$ $\quad v'(x) = e^x$

Donc $f'(x) = 1 \times e^x + e^x \times (x + 2) = (x + 3)e^x$

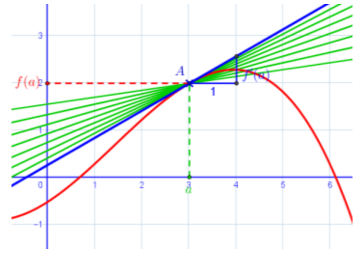
On pose $(E) : f'(x) = 0$ $\qquad (E) \Leftrightarrow x + 3 = 0$ car $e^x > 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$

Donc $S(E) = \{-3\}$

$f(-3) = -1 \times e^{-3} = \frac{-1}{e^3}$

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
Signes de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de f		↘	$\frac{-1}{e^3}$	↗	

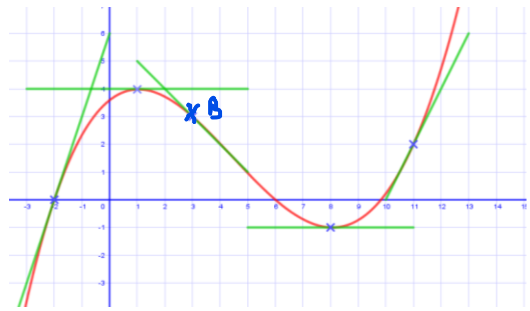
IV. Tangente à une courbe.



Définition : Soit f une fonction dérivable en a et A le point de C_f de coordonnées $A\,(a\,;\,f(a))$. La tangente à la courbe C_f au point A est la droite passant par A et qui a pour coefficient directeur ...$f'(a)$...

☑Savoir-faire : Savoir déterminer un nombre dérivé par lecture graphique :

On donne ci-contre la courbe représentative C_f d'une fonction f ainsi que certaines de ses tangentes.



1) Détermine $f(-2)$; $f(1)$; $f(3)$; $f(8)$ et $f(11)$.

$f(-2) = 0$; $f(1) = 4$; $f(3) = 3$ $f(8) = -1$ $f(11) = 2$

2) Détermine $f'(-2)$; $f'(1)$; $f'(3)$; $f'(8)$ et $f'(11)$.

$f'(-2)$ est le coefficient directeur de la tangente à C_f en $A(-2;0)$

$f'(-2) = 3$; $f'(1) = 0$; $f'(3) = -1$; $f'(8) = 0$; $f'(11) = 2$

3) Détermine l'équation de la tangente à C_f au point d'abscisse 3.

T : $y = mx + p$ $m = f'(3) = -1$ $(3; f(3)) \in T$

$y = -x + p$ $y_B = -x_B + p$ $\Rightarrow$ $p = 6$ $\Rightarrow$ T : $y = -x + 6$

4) Complète le tableau de variations de f.

f est croissante sur I $\Leftrightarrow$ $f'(x) \geq 0$ $\forall x \in I$
$\Leftrightarrow$ les tangentes à C_f sur I ont un coefficient directeur positif.
elles sont croissantes.

x	$-\infty$		1		8		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		+	0	−	0	+	
Variations de f	↗		4	↘	−1	↗	

Propriété : Si f est dérivable en a, la courbe Cf admet au point $A\,(a\,;\,f(a))$ une tangente T_A,
Alors T_A a pour équation : T_A : ...$y = f'(a) \times (x-a) + f(a)$...

☑Savoir-faire : Savoir déterminer l'équation d'une tangente par le calcul :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 3x - 1$.
Détermine une équation de la tangente à C_f au point A de la courbe d'abscisse 2.

$f(2) = 9$ $A(2;9)$ $f'(x) = 2x + 3$ $f'(2) = 7$

Donc T_A : $y = 7(x-2) + 9$ T_A : $y = 7x - 5$.

☑Savoir-faire : Savoir étudier la position relative de deux courbes :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 3x - 1$.
Étudie la position de C_f par rapport à la tangente à C_f au point A de la courbe d'abscisse 2.

$f(x) - (7x-5) = x^2 + 3x - 1 - 7x + 5 = x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$.

$f(x) - (7x-5) \geq 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 \geq 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$.

C_f est au dessus de T_A.