

EXERCICE 3

5 points

On considère la suite numérique (u_n) définie sur \mathbb{N} par :

$$u_0 = 2 \quad \text{et pour tout entier naturel } n, \quad u_{n+1} = -\frac{1}{2}u_n^2 + 3u_n - \frac{3}{2}.$$

Partie A : Conjecture

1. Calculer les valeurs exactes, données en fractions irréductibles, de u_1 et u_2 .
2. Donner une valeur approchée à 10^{-5} près des termes u_3 et u_4 .
3. Conjecturer le sens de variation et la convergence de la suite (u_n) .

Partie B : Validation des conjectures

On considère la suite numérique (v_n) définie pour tout entier naturel n , par :

$$v_n = u_n - 3.$$

1. Montrer que, pour tout entier naturel n , $v_{n+1} = -\frac{1}{2}v_n^2$.
2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $-1 \leq v_n \leq 0$.
3. a. Démontrer que, pour tout entier naturel n , $v_{n+1} - v_n = -v_n \left(\frac{1}{2}v_n + 1 \right)$.
b. En déduire le sens de variation de la suite (v_n) .
4. Pourquoi peut-on alors affirmer que la suite (v_n) converge ?
5. On note ℓ la limite de la suite (v_n) .

On admet que ℓ appartient à l'intervalle $[-1 ; 0]$ et vérifie l'égalité : $\ell = -\frac{1}{2}\ell^2$.

Déterminer la valeur de ℓ .

6. Les conjectures faites dans la partie A sont-elles validées ?