La fonction exponentielle.

I. Définition.

Théorème

Il existe une unique fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que: pour tout x réel, $f'(x) = f(x)$ et $f(0) = 1$.

Démonstration :

- ***Existence*** : on admet l'existence d'une telle fonction.
- ***Unicité*** : cette démonstration est exigible pour le bac : ***ROC***

- Démontrons que f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = f(x) \times f(-x)$

On rappelle que si f est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ alors la fonction $v : x \mapsto f(ax + b)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $v'(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ En particulier, la fonction $v : x \mapsto f(-x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $v'(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Ainsi, la fonction φ, produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout x réel, on a : $\varphi(x) = u(x) \times v(x)$ où $u(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots$ donc $u'(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots$ et $v(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots$ donc $v'(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots$

En appliquant la formule de dérivation d'un produit, on obtient :

$\forall\, x \in \mathbb{R},\ \varphi'(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Donc φ est une fonction .... sur $\mathbb{R}$. Or $\varphi(0) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$, et donc, pour tout nombre réel x, $\varphi(x) = 1$ c'est-à-dire que $f(x) \times f(-x) = 1$. On en déduit que : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) \neq 0$.

Démontrons maintenant l'unicité (***ROC***), c'est-à-dire qu'il existe une unique fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que: $f' = f$ et $f(0) = 1$.

Pour cela, supposons qu'il existe une autre fonction g dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que: $g' = g$ et $g(0) = 1$, on montre alors que $g = f$, c'est-à-dire que : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ g(x) = f(x)$, ce qui prouvera l'unicité de la fonction.

Soit h la fonction définie par $h(x) = \dfrac{g(x)}{f(x)}$. h est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ car g et f le sont et f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

De plus, on a : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ h'(x) = \dfrac{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}{[f(x)]^2} = \ldots\ldots\ldots\ldots$ car $f' = f$ et $g' = g$

Ainsi, h est une fonction $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ sur $\mathbb{R}$. Or, $h(\ \ldots\ ) = \dfrac{g(\ldots)}{f(\ldots)} = \ldots$. Donc, $\forall\, x \in \mathbb{R},\ h(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots$

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Définition

On appelle fonction exponentielle l'unique fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que: pour tout x réel, $f'(x) = f(x)$ et $f(0) = 1$. On note cette fonction **exp.**

Propriété

$\mathbf{exp}(0) = 1$; pour tout nombre réel x, $\mathbf{exp}(-x) = \dfrac{1}{\mathbf{exp}(x)}$.

II. Propriétés de la fonction exp.

1) Relation fonctionnelle

Propriété

Pour tout nombre réel x et y, $\mathbf{exp}\,(x + y) = \mathbf{exp}\,(x) \times \mathbf{exp}\,(y)$