On dit que la fonction exponentielle « transforme » une somme en un produit.

Démonstration :

Soit y un nombre réel quelconque et fixé et soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \frac{\exp(x+y)}{\exp(x)}$

1. Justifier que *h* est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que *h'* est la fonction nulle.

....
....
....

2. En déduire que pour tout nombre réel x, $h(x) = \exp(y)$ (on pourra calculer $h(0)$)

....

3. En déduire que pour tous nombres réels x et y, $\exp(x+y) = \exp(x) \times \exp(y)$

....

Corollaires

Pour tout nombre réel x et y, et pour tout entier relatif n : $\mathbf{exp}\,(x-y) = \frac{\exp(x)}{\exp(y)}$; $\mathbf{exp}\,(nx) = [\exp(x)]^n$

Eléments de démonstration :

....
....
....
....
....
....

2) Le nombre *e*

Définition

L'image de 1 par la fonction exponentielle est notée *e*. On a ainsi **exp** (. . .) = . . .

Avec la calculatrice, on peut obtenir une valeur approchée de e. $e \approx$ ....

On a donc, pour tout entier relatif n : $exp\,(n) = exp\,(1 \times n) = [exp\,(1)]^n = e^n$.

Par extension, on convient de noter pour tout nombre réel x, $\exp(x) =$ . . . . . (lire « exponentielle de x » ou « e exposant x »)

Propriété

Avec cette notation, les propriétés précédentes s'écrivent : Pour tous réels x et y et pour tout entier relatif n :

$\mathbf{e}^{x+y} =$ .... $\mathbf{e}^{-x} =$ .... $\mathbf{e}^{x-y} =$ .... $\mathbf{e}^{nx} =$ ....

Remarque :

- Ainsi, le nombre exp(3) = e^3 est bien égal à $e \times e \times e$
- On a, par exemple, $e^0 =$ .... et $e^1 =$ ....

III. Etude de la fonction exp.

1. Sens de variation de la fonction exp

Propriété

La fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$: $\forall\, \mathbf{x} \in \mathbb{R},\ \mathbf{e}^x > \mathbf{0}$.