

## EXERCICE 3

5 points

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Une ville possède un réseau de vélos en libre service dont deux stations A et B se situent en haut d'une colline. On admet qu'aucun vélo des autres stations n'arrive en direction des stations A et B.

On constate pour chaque heure  $n$  qu'en moyenne :

- 20 % des vélos présents à l'heure  $n - 1$  à la station A sont toujours à cette station. 60 % des vélos présents à l'heure  $n - 1$  à la station A sont à la station B et les autres sont dans d'autres stations du réseau ou en circulation.
- 10 % des vélos présents à l'heure  $n - 1$  à la station B sont à la station A, 30 % sont toujours à la station B et les autres sont dans d'autres stations du réseau ou en circulation.
- Au début de la journée, la station A comporte 50 vélos, la station B 60 vélos.

## Partie A

Au bout de  $n$  heures, on note  $a_n$  le nombre moyen de vélos présents à la station A et  $b_n$  le nombre moyen de vélos présents à la station B. On note  $U_n$  la matrice colonne

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} \text{ et donc } U_0 = \begin{pmatrix} 50 \\ 60 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer la matrice  $M$  telle que  $U_{n+1} = M \times U_n$ .
2. Déterminer  $U_1$  et  $U_2$ .
3. Au bout de combien d'heures reste-t-il un seul vélo dans la station A ?

## Partie B

Le service décide d'étudier les effets d'un approvisionnement des stations A et B consistant à apporter après chaque heure de fonctionnement 30 vélos à la station A et 10 vélos à la station B.

Afin de conduire cette étude, il décide de modéliser la situation présente de la manière suivante :

Au bout de  $n$  heures, on note  $\alpha_n$  le nombre moyen de vélos présents à la station A et  $\beta_n$  le nombre moyen de vélos présents à la station B. On note  $V_n$  la matrice colonne

$$\begin{pmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \end{pmatrix} \text{ et } V_0 = \begin{pmatrix} 50 \\ 60 \end{pmatrix}.$$

Dans ces conditions  $V_{n+1} = M \times V_n + R$  avec  $R = \begin{pmatrix} 30 \\ 10 \end{pmatrix}$ .

1. On note  $I$  la matrice  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  et  $N$  la matrice  $I - M$ .
  - a. On désigne par  $V$  une matrice colonne à deux lignes.  
Montrer que  $V = M \times V + R$  équivaut à  $N \times V = R$ .
  - b. On admet que  $N$  est une matrice inversible et que  $N^{-1} = \begin{pmatrix} 1,4 & 0,2 \\ 1,2 & 1,6 \end{pmatrix}$ .  
  
En déduire que  $V = \begin{pmatrix} 44 \\ 52 \end{pmatrix}$ .
2. Pour tout entier naturel  $n$ , on pose  $W_n = V_n - V$ .
  - a. Montrer que  $W_{n+1} = M \times W_n$ .
  - b. On admet que :
    - pour tout entier naturel  $n$ ,  $W_n = M^n \times W_0$ ,
    - pour tout entier naturel  $n \geq 1$ ,  $M^n = \frac{1}{2^{n-1}} \begin{pmatrix} 0,2 & 0,1 \\ 0,6 & 0,3 \end{pmatrix}$ .
 Calculer, pour tout entier naturel  $n \geq 1$ ,  $V_n$  en fonction de  $n$ .
  - c. Le nombre moyen de vélos présents dans les stations A et B a-t-il tendance à se stabiliser ?