Montrons, à l'aide d'un raisonnement par l'absurde que la fonction exp est strictement positive sur $\mathbb{R}$, c'est-à-dire que : pour tout réel x, $e^x > 0$.Pour cela, on suppose que : ………………………………… (hypothèse absurde)

Or, on sait que, pour tout réel x, $e^x \neq 0$. Ainsi, on suppose qu'il existe un réel a tel que $\mathbf{e^a < 0}$.
Or, la fonction exponentielle est dérivable donc ***continue*** sur $\mathbb{R}$ et
Le théorème des valeurs intermédiaires permet d'affirmer que : il existe au moins un réel α tel que $e^{\alpha} = 0$.
Ce qui est contradictoire avec la propriété (démontrée précédemment) : pour tout réel x, $e^x \neq 0$.
On en déduit que notre supposition (absurde) : Il existe un réel a tel que $e^a < 0$ est fausse, et donc que sa « négation » est vraie ; c'est-à-dire que : ……………………………………………………………………………………

Propriété

La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Démonstration :

La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\exp' = \exp$. Or, pour tout nombre réel x, $\exp(x) > 0$, donc la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

conséquences :

$e^a = e^b \Leftrightarrow$ …………………………… et $e^a < e^b \Leftrightarrow$ ……………………………

En particulier : $e^x \geq 1 \Leftrightarrow$ ……………………………

2. Limites en $+\infty$ et en $-\infty$ de la fonction exp

Propriété

$$\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$$

Démonstration : (exigible BAC ***ROC***)

Montrons que, pour tout nombre réel x, $\mathbf{e^x > x}$. On pourra alors conclure en appliquant un théorème de comparaison de limites.
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \mathbf{e^x - x}$. Etudier les variations de f et en déduire le signe de $f(x)$.

………………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………………

En déduire que $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$.

……
……

Propriété

$$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$$

Démonstration : (exigible BAC ***ROC***)

Or, quand x tend vers $-\infty$, $-x$ tend vers $+\infty$ donc par composition de limites, $\lim_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty$.

……
……

Conséquence graphique :……………………………………………………………………………………………………