Définition

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a\ ;\ b]$ avec a ≠ b.
On appelle valeur moyenne de f sur $[a\ ;\ b]$ le nombre réel $m = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$.

☑ Savoir-faire : Savoir calculer la valeur moyenne d'une fonction :

Calculer la valeur moyenne de la fonction f définie par $f(x) = x^2$ sur l'intervalle [0 ; 5].

☑ Amérique du nord 2013 :

On considère la fonction f définie sur R dont la courbe représentative *Cf* est tracée ci-contre dans un repère orthonormé.

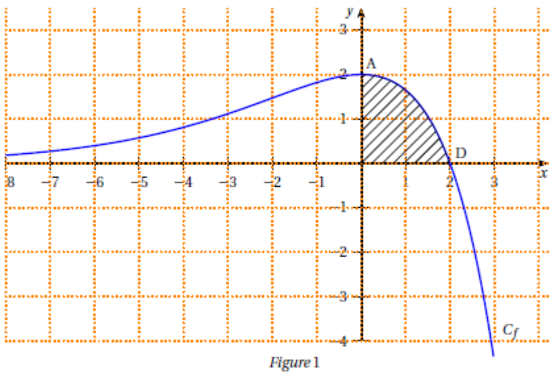

Figure 1

Partie A

On suppose que f est de la forme $f(x) = (b-x)\mathrm{e}^{ax}$ où a et b désignent deux constantes.
On sait que :

- Les points A(0 ; 2) et D(2 ; 0) appartiennent à la courbe $\mathcal{C}_f$.
- La tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A est parallèle à l'axe des abscisses.

On note f' la fonction dérivée de f, définie sur $\mathbb{R}$.

1. Par lecture graphique, indiquer les valeurs de $f(2)$ et $f'(0)$.
2. Calculer $f'(x)$.
3. En utilisant les questions précédentes, montrer que a et b sont solutions du système suivant :

$$\left\{\begin{array}{lcl} b-2 & = & 0 \\ ab-1 & = & 0 \end{array}\right.$$

4. Calculer a et b et donner l'expression de $f(x)$.

Partie B

On admet que $f(x) = (-x+2)\mathrm{e}^{0,5x}$.

1. À l'aide de la figure 1, justifier que la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$ est comprise entre 2 et 4.
2. a. On considère F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = (-2x+8)\mathrm{e}^{0,5x}$.
   Montrer que F est une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

   b. Calculer la valeur exacte de $\displaystyle\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$ et en donner une valeur approchée à 10^{-2} près.
3. On considère Gune autre primitive de f sur $\mathbb{R}$.
   Parmi les trois courbes C_1, C_2 et C_3 ci-dessous, une seule est la représentation graphique de G.
   Déterminer la courbe qui convient et justifier la réponse.

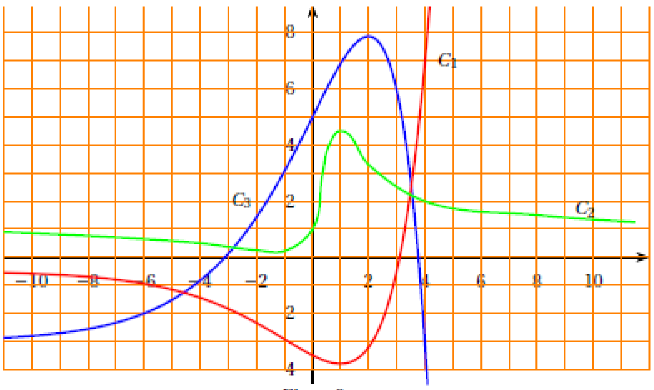

Figure 2