BacS Nouvelle-Calédonie nov 2014

EXERCICE 4 — 5 points

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par

$$f(x) = 5 - \frac{4}{x+2}.$$

On admettra que f est dérivable sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.
On a tracé en **annexe 1** dans un repère orthonormé la courbe $\mathcal{C}$ représentative de f ainsi que la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = x$.

1. Démontrer que f est croissante sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.
2. Résoudre l'équation $f(x) = x$ sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$. On note α la solution. On donnera la valeur exacte de α puis on en donnera une valeur approchée à 10^{-2} près.
3. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.
Sur la figure de **annexe 1**, en utilisant la courbe $\mathcal{C}$ et la droite $\mathcal{D}$, placer les points M_0, M_1 et M_2 d'ordonnée nulle et d'abscisses respectives u_0, u_1 et u_2.
Quelles conjectures peut-on faire sur le sens de variation et la convergence de la suite (u_n) ?
4. **a.** Démontrer, par récurrence, que, pour tout entier naturel n,
$$0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \alpha$$
où α est le réel défini dans la question 2.
b. Peut-on affirmer que la suite (u_n) est convergente ? On justifiera la réponse.
5. Pour tout entier naturel n, on définit la suite (S_n) par
$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_n.$$
a. Calculer S_0, S_1 et S_2. Donner une valeur approchée des résultats à 10^{-2} près.
b. Compléter l'algorithme donné en **annexe 2** pour qu'il affiche la somme S_n pour la valeur de l'entier n demandée à l'utilisateur.
c. Montrer que la suite (S_n) diverge vers $+\infty$.