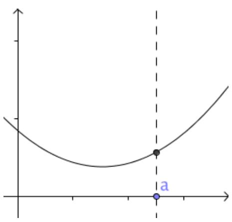
# Continuité.

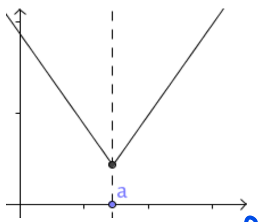
***Karl Weierstrass*** *(1815 ; 1897) est un mathématicien allemand. Il apporte, entre autres, les premières définitions rigoureuses au concept de limite et de continuité d'une fonction.*

## I. Définition.

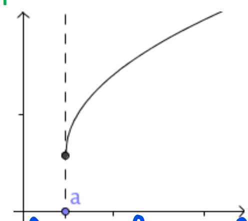
☺ Exemples et contre-exemples :



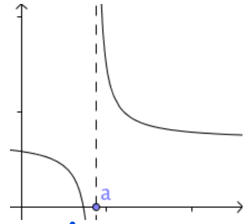
$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$



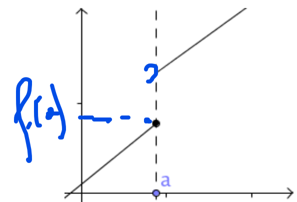
$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$



$\lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) = f(a)$



f n'est pas définie en a.




$\lim_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x) = f(a)$

$\lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) \neq f(a)$

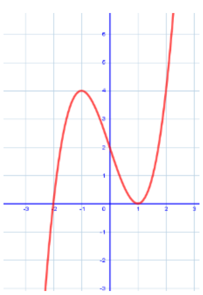
La courbe représentative d'une fonction continue se trace sans lever le crayon.

**Définition :** Soit une fonction $f$ définie sur un intervalle $\mathrm{I}$.

☺ Soit $a$ un nombre appartenant $\mathrm{I}$ à On dit que $f$ est continue en $a$ si $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

☺ On dit que $f$ est continue sur $\mathrm{I}$ si pour tout nombre $a$ appartenant à $\mathrm{I}$, $f$ est continue en $a$.

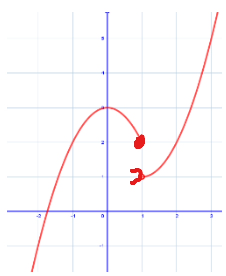
Exemples:



La fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x + 2$

f est continue en tout nombre réel.

f est continue sur ℝ.



La fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par

$f(x) = \begin{cases} 3 - x^2, si\ x \le 1 \\ x^2 - 2x + 2,\ si\ x > 1 \end{cases}$

$\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x) = \lim_{x\to 1} 3 - x^2 = 2$

$\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x) = \lim_{x\to 1} x^2 - 2x + 2 = 1$

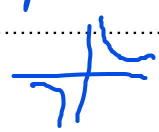
Donc f n'est pas continue en 1.

**Théorème (admis) :**
Une fonction dérivable sur un intervalle $\mathrm{I}$ est continue sur $\mathrm{I}$

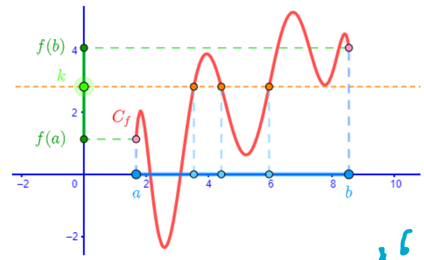
**Propriété (admise) :**
Les fonctions affines, polynôme, rationnelles, racine carrée et exponentielle sont continues sur leur ensemble de définition.
Les sommes, produits, quotients et composées de fonctions continues sont continues.

Remarques :

Attention : la fonction inverse est continue sur $]-\infty ; 0[$ et est continue sur $]0 ; +\infty[$ mais elle n'est pas continue sur $]-\infty ; 0[ \cup ]0 ; +\infty[$.

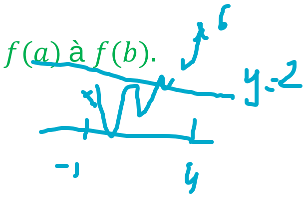


## II. Théorème des valeurs intermédiaires.




**Théorème des valeurs intermédiaires (admis) :**
Soit $f$ , une fonction définie et continue sur un intervalle $[a\ ;\ b]$, alors pour tout réel $k$ compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $(E): f(x) = k$ admet au moins une solution $\alpha$ appartenant à $[a\ ;\ b]$.

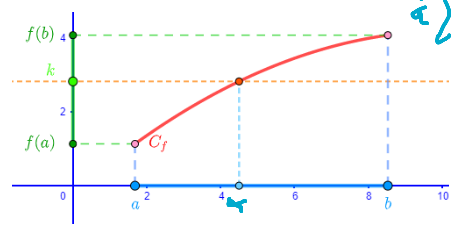
Cela signifie que lorsque $x$ varie de $a$ à $b$, $f(x)$ prend au moins une fois toutes les valeurs de $f(a)$ à $f(b)$.




☑ *Savoir-faire : Savoir prouver l'existence d'au moins une solution d'une équation :*

On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 4x^2 + 6$.
Démontrer que l'équation $f(x) = 2$ admet au moins une solution sur $[-1\ ;\ 4]$.

$f(-1) = 1$ et $f(4) = 6$ donc $2 \in [f(-1)\ ;\ f(4)]$
$f$ est continue sur $[-1 ; 4]$ Donc d'après le th, l'éq a au moins 1 antécédent appartenant à $[-1 ; 4]$




☺ Cas particulier : solution unique

**Théorème des valeurs intermédiaires (admis) :**
Soit $f$ , une fonction définie, continue et **strictement monotone** sur un intervalle $[a\ ;\ b]$, alors pour tout réel $k$ compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $(E): f(x) = k$ admet une **unique** solution $\alpha$ appartenant à $[a\ ;\ b]$.

☑ *Savoir-faire : Savoir utiliser le théorème des valeurs intermédiaires :*

On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$.
1) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement une solution sur l'intervalle $[2{,}5\ ;\ 5]$.
2) À l'aide de la calculatrice, donner un encadrement au centième de la solution $\alpha$.

1) $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Signe de $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| Variations de $f$ | $-\infty$ | ↗ | $2$ | ↘ | $-2$ | ↗ | $+\infty$ |

$f(2{,}5) = -1{,}125$ $\quad f(5) = 52$
Donc $0$ appartient à $[f(2{,}5)\ ;\ f(5)]$
De plus $f$ est continue et strictement croissante sur $[2{,}5 ; 5]$ donc d'après le TVI l'équation $(E)$ : $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in [2{,}5 ; 5]$

☑ *Savoir-faire : Savoir utiliser la calculatrice pour donner un encadrement d'une solution :*

*A l'aide de la calculatrice, il est possible d'effectuer des balayages successifs en augmentant la précision.*

Avec un pas égal à 1

| X | Y1 |
|---|---|
| 0 | 2 |
| 1 | 0 |
| 2 | -2 |
| 3 | 2 |
| 4 | 18 |
| 5 | 52 |
| 6 | 110 |

La solution est comprise entre 2 et 3.
$2 < \alpha < 3$

Avec un pas égal à 0,1

| X | Y1 |
|---|---|
| 2.4 | -1.456 |
| 2.5 | -1.125 |
| 2.6 | -.704 |
| 2.7 | -.187 |
| 2.8 | .432 |
| 2.9 | 1.159 |
| 3 | 2 |

La solution est comprise entre 2,7 et 2,8
$2{,}7 < \alpha < 2{,}8$

Avec un pas égal à 0,01

| X | Y1 |
|---|---|
| 2.7 | -.187 |
| 2.71 | -.1298 |
| 2.72 | -.0716 |
| 2.73 | -.0123 |
| 2.74 | .04802 |
| 2.75 | .10938 |
| 2.76 | .17178 |

La solution est comprise entre 2,73 et 2,74
$2{,}73 < \alpha < 2{,}74$

☺ Application à un intervalle non borné

Propriété :
Soit $f$, une fonction définie, continue et **strictement monotone** sur un intervalle $[a\ ;\ +\infty]$, alors pour tout réel $k$ compris entre $f(a)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ l'équation $(E)$: $f(x) = k$ admet une **unique** solution $\alpha \in [a\ ;\ b]$.

Remarque :

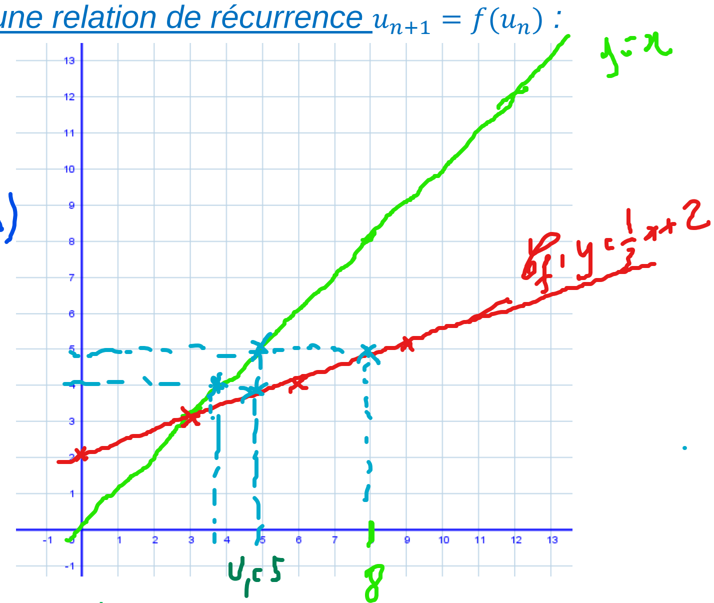
## III. Application à l'étude d'une suite.

☺ Construire les termes d'une suite définie par récurrence.

☑ *Savoir-faire : Savoir construire une suite définie par une relation de récurrence* $u_{n+1} = f(u_n)$ :

Soit $(u_n)$ la suite définie par $u_0 = 8$ et
$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} =$ $\frac{1}{3}U_n + 2$
Construire $u_0$, $u_1$, $u_2$ et $u_3$.

$(U_n)$ est définie par une relation $U_{n+1} = f(U_n)$
avec $f(x) = \frac{1}{3}x + 2$
A partir d'un terme on construit le suivant en utilisant $C_f$.
On le reporte sur l'axe des abscisses en utilisant la droite $y = x$.




☺ Image d'une suite convergente par une fonction continue.

Propriété :
Soit une fonction $f$ définie et continue sur un intervalle $I$ et
soit une suite $(u_n)$ telle que pour tout $n$, on a : $u_n \in I$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.
Si $(u_n)$ converge vers $l$ de $I$ alors $f(l) = l$.

☑ *Savoir-faire : Savoir construire une suite définie par une relation de récurrence* $u_{n+1} = f(u_n)$ :

Soit $(u_n)$ la suite définie par $u_0 = 8$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 0{,}85u_n + 1{,}8$.
En supposant que la suite $(u_n)$ est convergente, détermine sa limite.

Soit $\ell$ la limite de $(U_n)$ : $U_{n+1} = f(U_n)$ avec $f : x \mapsto 0{,}85x + 1{,}8$
$f$ est continue donc $f(\ell) = \ell$ donc $0{,}85 \times \ell + 1{,}8 = \ell$
donc $-0{,}15\ell = -1{,}8$
donc $\ell = \frac{-1{,}8}{-0{,}15} = 12$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 12$.