



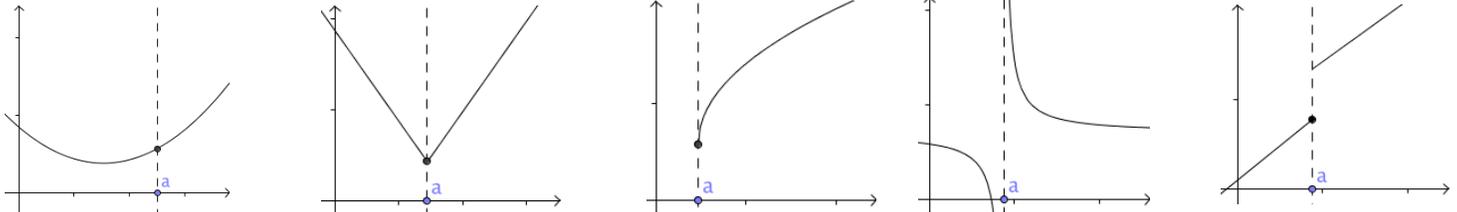
Continuité.



Karl Weierstrass (1815 ; 1897) est un mathématicien allemand. Il apporte, entre autres, les premières définitions rigoureuses au concept de limite et de continuité d'une fonction.

I. Définition.

☺ Exemples et contre-exemples :



.....
.....

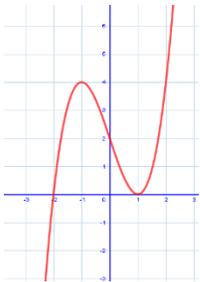
La courbe représentative d'une fonction continue se trace sans lever le crayon.

Définition : Soit une fonction f définie sur un intervalle I .

☺ Soit a un nombre appartenant à I On dit que f est continue en a si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

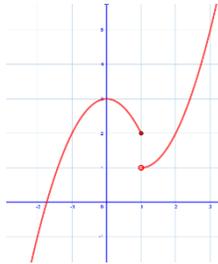
☺ On dit que f est continue sur I si pour tout nombre a appartenant à I , f est continue en a .

Exemples:



La fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^3 - 3x + 2$

.....
.....
.....



La fonction f définie sur \mathbb{R} par

$$f(x) = \begin{cases} 3 - x^2, & \text{si } x \leq 1 \\ x^2 - 2x + 2, & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

.....
.....
.....



.....
.....
.....
.....
.....

Théorème (admis) :

Une fonction dérivable sur un intervalle I est continue sur I

Propriété (admise) :

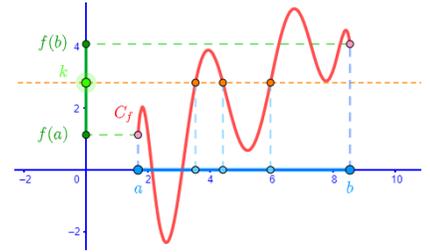
Les fonctions affines, polynôme, rationnelles, racine carrée et exponentielle sont continues sur leur ensemble de définition.

Les sommes, produits, quotients et composées de fonctions continues sont continues.

Remarques :

.....
.....
.....

II. Théorème des valeurs intermédiaires.



Théorème des valeurs intermédiaires (admis) :

Soit f , une fonction définie et continue sur un intervalle $[a ; b]$, alors pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation (E): $f(x) = k$ admet au moins une solution α appartenant à $[a ; b]$.

Cela signifie que lorsque x varie de a à b , $f(x)$ prend au moins une fois toutes les valeurs de $f(a)$ à $f(b)$.

☑ Savoir-faire : Savoir prouver l'existence d'au moins une solution d'une équation :

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^3 - 4x^2 + 6$.
Démontrer que l'équation $f(x) = 2$ admet au moins une solution sur $[-1 ; 4]$.

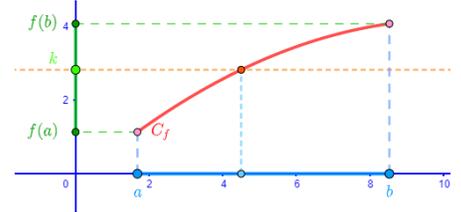
.....

.....

☺ Cas particulier : solution unique

Théorème des valeurs intermédiaires (admis) :

Soit f , une fonction définie, continue et **strictement monotone** sur un intervalle $[a ; b]$, alors pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation (E): $f(x) = k$ admet une **unique** solution α appartenant à $[a ; b]$.



☑ Savoir-faire : Savoir utiliser le théorème des valeurs intermédiaires :

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$.

- Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement une solution sur l'intervalle $[2,5 ; 5]$.
- À l'aide de la calculatrice, donner un encadrement au centième de la solution α .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

☑ Savoir-faire : Savoir utiliser la calculatrice pour donner un encadrement d'une solution :

A l'aide de la calculatrice, il est possible d'effectuer des balayages successifs en augmentant la précision.

Avec un pas égal à 1

X	Y1
2	2
2.1	0.1
2.2	-0.8
2.3	-1.7
2.4	-2.4
2.5	-2.9
2.6	-3.2
2.7	-3.3
2.8	-3.1
2.9	-2.6
3	-1.9
3.1	-1.0
3.2	0
3.3	0.9
3.4	1.6
3.5	2.1
3.6	2.4
3.7	2.5
3.8	2.4
3.9	2.1
4	1.6
4.1	1.0
4.2	0.2
4.3	-0.7
4.4	-1.6
4.5	-2.4
4.6	-3.1
4.7	-3.6
4.8	-3.9
4.9	-4
5	-3.9
5.1	-3.6
5.2	-3.1
5.3	-2.4
5.4	-1.6
5.5	-0.7
5.6	0.2
5.7	1.1
5.8	1.9
5.9	2.6
6	3.2
6.1	3.7
6.2	4.1
6.3	4.4
6.4	4.5
6.5	4.4
6.6	4.1
6.7	3.7
6.8	3.2
6.9	2.6
7	2
7.1	1.3
7.2	0.6
7.3	-0.1
7.4	-0.8
7.5	-1.4
7.6	-1.9
7.7	-2.3
7.8	-2.6
7.9	-2.8
8	-2.9
8.1	-2.8
8.2	-2.6
8.3	-2.3
8.4	-1.9
8.5	-1.4
8.6	-0.8
8.7	-0.2
8.8	0.4
8.9	1
9	1.5
9.1	2
9.2	2.4
9.3	2.8
9.4	3.1
9.5	3.3
9.6	3.4
9.7	3.4
9.8	3.3
9.9	3.1
10	2.8
10.1	2.4
10.2	1.9
10.3	1.3
10.4	0.7
10.5	0
10.6	-0.7
10.7	-1.4
10.8	-2
10.9	-2.5
11	-3
11.1	-3.4
11.2	-3.7
11.3	-3.9
11.4	-4
11.5	-3.9
11.6	-3.7
11.7	-3.4
11.8	-3
11.9	-2.5
12	-2
12.1	-1.4
12.2	-0.8
12.3	-0.2
12.4	0.4
12.5	1
12.6	1.5
12.7	2
12.8	2.4
12.9	2.8
13	3.1
13.1	3.3
13.2	3.4
13.3	3.4
13.4	3.3
13.5	3.1
13.6	2.8
13.7	2.4
13.8	1.9
13.9	1.3
14	0.7
14.1	0
14.2	-0.7
14.3	-1.4
14.4	-2
14.5	-2.5
14.6	-3
14.7	-3.4
14.8	-3.7
14.9	-3.9
15	-3.9
15.1	-3.7
15.2	-3.4
15.3	-3
15.4	-2.5
15.5	-2
15.6	-1.4
15.7	-0.8
15.8	-0.2
15.9	0.4
16	1
16.1	1.5
16.2	2
16.3	2.4
16.4	2.8
16.5	3.1
16.6	3.3
16.7	3.4
16.8	3.4
16.9	3.3
17	3.1
17.1	2.8
17.2	2.4
17.3	1.9
17.4	1.3
17.5	0.7
17.6	0
17.7	-0.7
17.8	-1.4
17.9	-2
18	-2.5
18.1	-3
18.2	-3.4
18.3	-3.7
18.4	-3.9
18.5	-3.9
18.6	-3.7
18.7	-3.4
18.8	-3
18.9	-2.5
19	-2
19.1	-1.4
19.2	-0.8
19.3	-0.2
19.4	0.4
19.5	1
19.6	1.5
19.7	2
19.8	2.4
19.9	2.8
20	3.1

La solution est comprise entre et

..... < α <

Avec un pas égal à 0,1

X	Y1
2	2
2.1	0.1
2.2	-0.8
2.3	-1.7
2.4	-2.4
2.5	-2.9
2.6	-3.2
2.7	-3.3
2.8	-3.1
2.9	-2.6
3	-1.9
3.1	-1.0
3.2	0
3.3	0.9
3.4	1.6
3.5	2.1
3.6	2.4
3.7	2.5
3.8	2.4
3.9	2.1
4	1.6
4.1	1.0
4.2	0.2
4.3	-0.7
4.4	-1.6
4.5	-2.4
4.6	-3.1
4.7	-3.6
4.8	-3.9
4.9	-4
5	-3.9
5.1	-3.6
5.2	-3.1
5.3	-2.4
5.4	-1.6
5.5	-0.7
5.6	0.2
5.7	1.1
5.8	1.9
5.9	2.6
6	3.2
6.1	3.7
6.2	4.1
6.3	4.4
6.4	4.5
6.5	4.4
6.6	4.1
6.7	3.7
6.8	3.2
6.9	2.6
7	2
7.1	1.3
7.2	0.6
7.3	-0.1
7.4	-0.8
7.5	-1.4
7.6	-1.9
7.7	-2.3
7.8	-2.6
7.9	-2.8
8	-2.9
8.1	-2.8
8.2	-2.6
8.3	-2.3
8.4	-1.9
8.5	-1.4
8.6	-0.8
8.7	-0.2
8.8	0.4
8.9	1
9	1.5
9.1	2
9.2	2.4
9.3	2.8
9.4	3.1
9.5	3.3
9.6	3.4
9.7	3.4
9.8	3.3
9.9	3.1
10	2.8
10.1	2.4
10.2	1.9
10.3	1.3
10.4	0.7
10.5	0
10.6	-0.7
10.7	-1.4
10.8	-2
10.9	-2.5
11	-3
11.1	-3.4
11.2	-3.7
11.3	-3.9
11.4	-4
11.5	-3.9
11.6	-3.7
11.7	-3.4
11.8	-3
11.9	-2.5
12	-2
12.1	-1.4
12.2	-0.8
12.3	-0.2
12.4	0.4
12.5	1
12.6	1.5
12.7	2
12.8	2.4
12.9	2.8
13	3.1
13.1	3.3
13.2	3.4
13.3	3.4
13.4	3.3
13.5	3.1
13.6	2.8
13.7	2.4
13.8	1.9
13.9	1.3
14	0.7
14.1	0
14.2	-0.7
14.3	-1.4
14.4	-2
14.5	-2.5
14.6	-3
14.7	-3.4
14.8	-3.7
14.9	-3.9
15	-3.9
15.1	-3.7
15.2	-3.4
15.3	-3
15.4	-2.5
15.5	-2
15.6	-1.4
15.7	-0.8
15.8	-0.2
15.9	0.4
16	1
16.1	1.5
16.2	2
16.3	2.4
16.4	2.8
16.5	3.1
16.6	3.3
16.7	3.4
16.8	3.4
16.9	3.3
17	3.1
17.1	2.8
17.2	2.4
17.3	1.9
17.4	1.3
17.5	0.7
17.6	0
17.7	-0.7
17.8	-1.4
17.9	-2
18	-2.5
18.1	-3
18.2	-3.4
18.3	-3.7
18.4	-3.9
18.5	-3.9
18.6	-3.7
18.7	-3.4
18.8	-3
18.9	-2.5
19	-2
19.1	-1.4
19.2	-0.8
19.3	-0.2
19.4	0.4
19.5	1
19.6	1.5
19.7	2
19.8	2.4
19.9	2.8
20	3.1

La solution est comprise entre et

..... < α <

Avec un pas égal à 0,01

X	Y1
2	2
2.01	1.99
2.02	1.96
2.03	1.91
2.04	1.84
2.05	1.75
2.06	1.64
2.07	1.51
2.08	1.36
2.09	1.19
2.1	1.0
2.11	0.79
2.12	0.56
2.13	0.31
2.14	0.04
2.15	-0.25
2.16	-0.52
2.17	-0.77
2.18	-1.0
2.19	-1.2
2.2	-1.38
2.21	-1.53
2.22	-1.65
2.23	-1.74
2.24	-1.8
2.25	-1.83
2.26	-1.83
2.27	-1.8
2.28	-1.74
2.29	-1.65
2.3	-1.53
2.31	-1.38
2.32	-1.2
2.33	-1.0
2.34	-0.79
2.35	-0.56
2.36	-0.31
2.37	-0.04
2.38	0.25
2.39	0.52
2.4	0.77
2.41	1.0
2.42	1.2
2.43	1.38
2.44	1.53
2.45	1.65
2.46	1.74
2.47	1.8
2.48	1.83
2.49	1.83
2.5	1.8
2.51	1.74
2.52	1.65
2.53	1.53
2.54	1.38
2.55	1.2
2.56	1.0
2.57	0.79
2.58	0.56
2.59	0.31
2.6	0.04
2.61	-0.25
2.62	-0.52
2.63	-0.77
2.64	-1.0
2.65	-1.2
2.66	-1.38
2.67	-1.53
2.68	-1.65
2.69	-1.74
2.7	-1.8
2.71	-1.83
2.72	-1.83
2.73	-1.8
2.74	-1.74
2.75	-1.65
2.76	-1.53
2.77	-1.38
2.78	-1.2
2.79	-1.0
2.8	-0.79
2.81	-0.56
2.82	-0.31
2.83	-0.04
2.84	0.25
2.85	0.52
2.86	0.77
2.87	1.0
2.88	1.2
2.89	1.38
2.9	1.53
2.91	1.65
2.92	1.74
2.93	1.8
2.94	1.83
2.95	1.83
2.96	1.8
2.97	1.74
2.98	1.65
2.99	1.53
3	1.38
3.01	1.2
3.02	1.0
3.03	0.79
3.04	0.56
3.05	0.31
3.06	0.04
3.07	-0.25
3.08	-0.52
3.09	-0.77
3.1	-1.0
3.11	-1.2
3.12	-1.38
3.13	-1.53
3.14	-1.65
3.15	-1.74
3.16	-1.8
3.17	-1.83
3.18	-1.83
3.19	-1.8
3.2	-1.74
3.21	-1.65
3.	

☺ Application à un intervalle non borné

Propriété :

Soit f , une fonction définie, continue et **strictement monotone** sur un intervalle $[a ; +\infty]$, alors pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ l'équation (E): $f(x) = k$ admet une **unique** solution $\alpha \in [a ; b]$.

Remarque :

.....
.....

III. Application à l'étude d'une suite.

☺ Construire les termes d'une suite définie par récurrence.

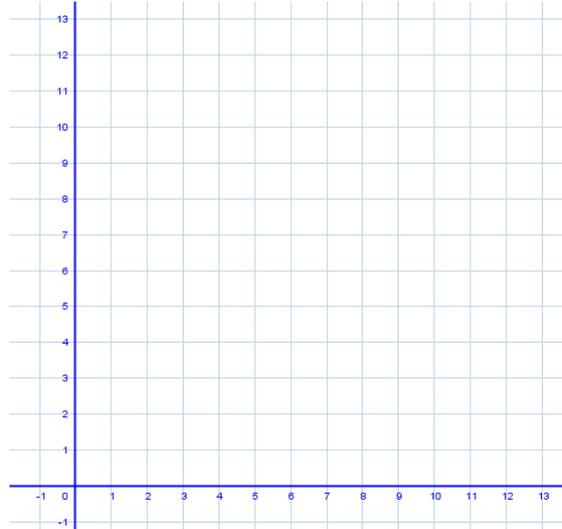
☑ Savoir-faire : Savoir construire une suite définie par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$:

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 8$ et

$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 0,85u_n + 1,8.$

Construire u_0, u_1, u_2 et u_3 .

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....



☺ Image d'une suite convergente par une fonction continue.

Propriété :

Soit une fonction f définie et continue sur un intervalle I et soit une suite (u_n) telle que pour tout n , on a : $u_n \in I$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.
Si (u_n) converge vers l de I alors $f(l) = l$.

☑ Savoir-faire : Savoir construire une suite définie par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$:

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 8$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 0,85u_n + 1,8.$

En supposant que la suite (u_n) est convergente, détermine sa limite.

.....
.....