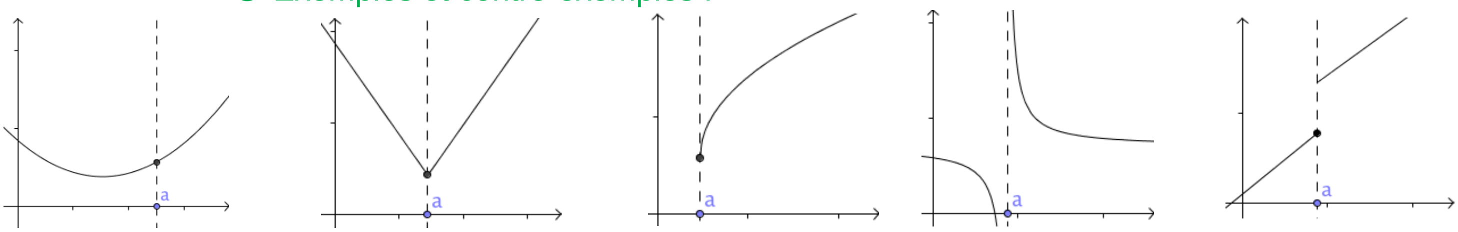
Continuité.

***Karl Weierstrass** (1815 ; 1897) est un mathématicien allemand. Il apporte, entre autres, les premières définitions rigoureuses au concept de limite et de continuité d'une fonction.*

I. Définition.

☺ Exemples et contre-exemples :



....

....

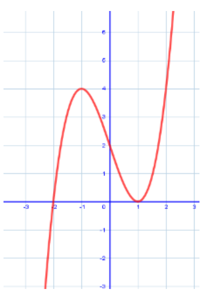
La courbe représentative d'une fonction continue se trace sans lever le crayon.

Définition : Soit une fonction f définie sur un intervalle I.

☺ Soit a un nombre appartenant I à On dit que f est continue en a si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

☺ On dit que f est continue sur I si pour tout nombre a appartenant à I , f est continue en a.

Exemples:



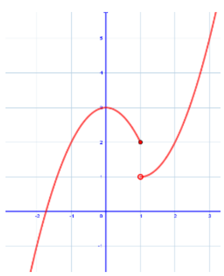
La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x + 2$

....

....

....

....



La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

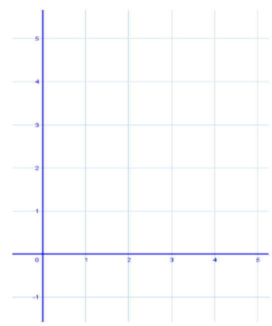
$$f(x) = \begin{cases} 3 - x^2, si\ x \leq 1 \\ x^2 - 2x + 2,\ si\ x > 1 \end{cases}$$

....

....

....

....



....

....

....

....

....

....

....

Théorème (admis) :
Une fonction dérivable sur un intervalle I est continue sur I

Propriété (admise) :
Les fonctions affines, polynôme, rationnelles, racine carrée et exponentielle sont continues sur leur ensemble de définition.
Les sommes, produits, quotients et composées de fonctions continues sont continues.

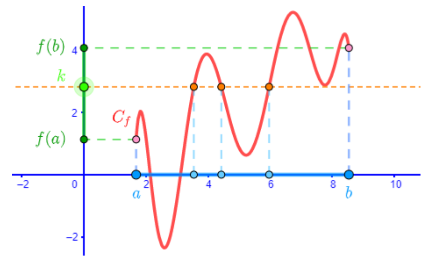
Remarques :

....

....

....

II. Théorème des valeurs intermédiaires.



Théorème des valeurs intermédiaires (admis) :
Soit f , une fonction définie et continue sur un intervalle $[a\ ;\ b]$, alors pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $(E){:}\ f(x) = k$ admet au moins une solution α appartenant à $[a\ ;\ b]$.

Cela signifie que lorsque x varie de a à b, $f(x)$ prend au moins une fois toutes les valeurs de $f(a)$ à $f(b)$.

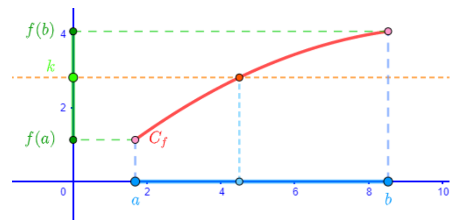
☑ *Savoir-faire : Savoir prouver l'existence d'au moins une solution d'une équation :*

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 4x^2 + 6$.
Démontrer que l'équation $f(x) = 2$ admet au moins une solution sur [–1 ; 4].

....

....

☺ Cas particulier : solution unique



Théorème des valeurs intermédiaires (admis) :
Soit f , une fonction définie, continue et **strictement monotone** sur un intervalle $[a\ ;\ b]$, alors pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $(E){:}\ f(x) = k$ admet une **unique** solution α appartenant à $[a\ ;\ b]$.

☑ *Savoir-faire : Savoir utiliser le théorème des valeurs intermédiaires :*

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$.
1) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement une solution sur l'intervalle $[2{,}5\ ;5]$.
2) À l'aide de la calculatrice, donner un encadrement au centième de la solution α.

....

....

....

....

....

....

....

....

☑ *Savoir-faire : Savoir utiliser la calculatrice pour donner un encadrement d'une solution :*

A l'aide de la calculatrice, il est possible d'effectuer des balayages successifs en augmentant la précision.

Avec un pas égal à 1

X	Y1
0	2
1	0
2	-2
3	2
4	18
5	52
6	110

La solution est comprise entre …. et …..

…… < α < ……

Avec un pas égal à 0,1

X	Y1
2.4	-1.456
2.5	-1.125
2.6	-.704
2.7	-.187
2.8	.432
2.9	1.159
3	2

La solution est comprise entre …. et …..

…… < α < ……

Avec un pas égal à 0,01

X	Y1
2.7	-.187
2.71	-.1298
2.72	-.0716
2.73	-.0123
2.74	.04802
2.75	.10938
2.76	.17178

La solution est comprise entre …. et …..

…… < α < ……

☺ Application à un intervalle non borné

Propriété :

Soit f, une fonction définie, continue et **strictement monotone** sur un intervalle $[a\ ;\ +\infty]$, alors pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ l'équation (E): $f(x) = k$ admet une **unique** solution $\alpha \in [a\ ;\ b]$.

Remarque :

………

………

III. Application à l'étude d'une suite.

☺ Construire les termes d'une suite définie par récurrence.

☑ *Savoir-faire : Savoir construire une suite définie par une relation de récurrence* $u_{n+1} = f(u_n)$ *:*

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 8$ et

$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 0{,}85u_n + 1{,}8$.

Construire u_0 , u_1, u_2 et u_3.

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

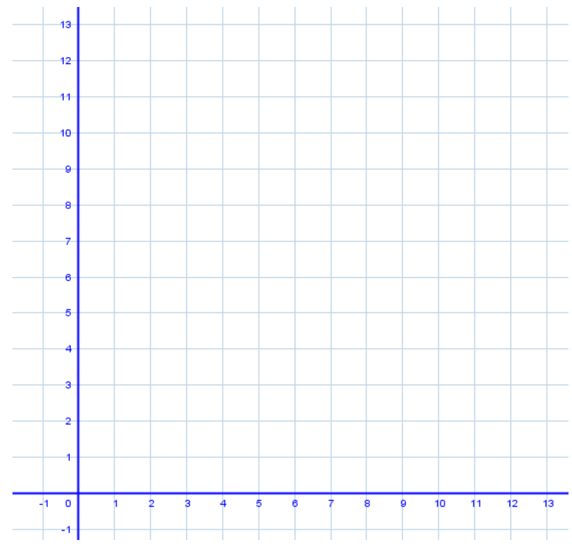
……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………



☺ Image d'une suite convergente par une fonction continue.

Propriété :

Soit une fonction f définie et continue sur un intervalle I et

soit une suite (u_n) telle que pour tout n, on a : $u_n \in I$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

Si (u_n) converge vers l de I alors $f(l) = l$.

☑ *Savoir-faire : Savoir construire une suite définie par une relation de récurrence* $u_{n+1} = f(u_n)$ *:*

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 8$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 0{,}85u_n + 1{,}8$.

En supposant que la suite (u_n) est convergente, détermine sa limite.

………

………