Généralités sur les fonctions.

Le terme de fonction a été introduit par le mathématicien allemand LEIBNIZ Gottfried Wilhelm (1646-1716) en 1673 dans un manuscrit inédit "La Méthode inverse des tangentes ou à propos des fonctions".

I. Notion de fonctions.

Définition : Soit D un ou plusieurs intervalles de $\mathbb{R}$. Définir une fonction f de D dans $\mathbb{R}$, c'est associer à chaque réel x de D un unique réel noté $f(x)$. On dit que D est l'ensemble de définition de la fonction f, et on le note D_f.

On peut définir une fonction par une expression, un graphique, un algorithme ….

- Une fonction est généralement désignée par l'une des lettres f, g, h …
- Au lieu d'écrire « f est la fonction qui à x associe $f(x)$ », on peut écrire « $f : x \mapsto f(x)$ ».
- Si x et y sont deux réels tels que $y = f(x)$, alors on dit que y est l'image de x par la fonction f, et que x est un antécédent de y par f.
- Par une fonction, un réel x ne peut avoir qu'une seule image, mais un réel y peut avoir aucun, un ou plusieurs antécédents.

☑ Savoir-faire : Savoir utiliser les termes image ou antécédent :

Traduire chacune des phrases suivantes par une égalité :

1) *L'image de 3 par la fonction g est 5 :* $g(3)=5$
2) *2 est un antécédent de -3 par la fonction f :* $f(2)=-3$
3) *-5 a pour image $-\sqrt{2}$ par la fonction h :* $h(-5)=-\sqrt{2}$

☑ Savoir-faire : Savoir calculer une image ou un antécédent avec l'expression d'une fonction :

Soit f la fonction définie par $f(x) = (2x-1)(x+3) = 2x^2+5x-3$

1) *Déterminer les images de 5 et $\sqrt{3}$ par la fonction f.*

$f(5) = 2\times5^2+5\times5-3 = 72$ l'image de 5 est 72.

$f(\sqrt{3}) = 2\times\sqrt{3}^2+5\times\sqrt{3}-3 = 6+5\sqrt{3}-3 = 3+5\sqrt{3}$ l'image de $\sqrt{3}$ est $3+5\sqrt{3}$

2) *Déterminer tous les antécédents de 0 par f.*

les antécédents de 0 sont les solutions de l'équation $(E_1) : f(x)=0$.

$(E_1) \Leftrightarrow (2x-1)(x+3)=0$ $(E_1) \Leftrightarrow 2x-1=0$ ou $x+3=0$ $S(E_1)=\left\{-3 ; \frac{1}{2}\right\}$

0 a 2 antécédents qui sont -3 et $\frac{1}{2}$

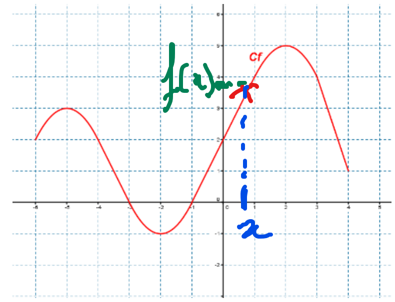
3) *Déterminer tous les antécédents de -3 par f.*

les antécédents de -3 sont les solutions de $(E_2) : f(x)=-3$

$(E_2) \Leftrightarrow 2x^2+5x-3=-3$ $(E_2) \Leftrightarrow 2x^2+5x=0$ $(E_2) \Leftrightarrow x(2x+5)=0$ $S(E_2)=\left\{-\frac{5}{2} ; 0\right\}$

-3 a deux antécédents qui sont $-\frac{5}{2}$ et 0.

II. Courbe représentative d'une fonction.



Définition : Soit f une fonction d'ensemble de définition Df. On appelle Courbe représentative de la fonction f l'ensemble Cf des points M du plan de coordonnées $M(x\,;\,f(x))$ avec $x \in Df$.
On dit que $y = f(x)$ est l'équation de la courbe Cf.

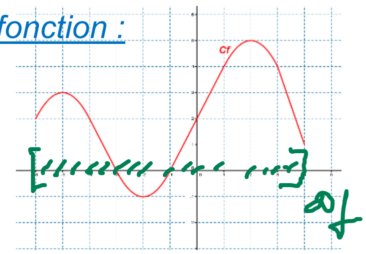
☑ *Savoir-faire : Savoir déterminer si un point appartient à la courbe d'une fonction :*

Le point $A(2\,;5)$ appartient-il à la courbe représentative de la fonction f, définie par $f(x) = x^2 + 2$

$f(2) = 2^2 + 2 = 4 + 2 = 6 \neq 5$ $f(x_A) \neq y_A$ Donc $A \notin Cf$.

III. Lecture graphique sur la courbe représentative d'une fonction.

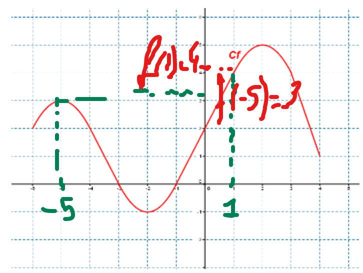
☑ *Savoir-faire : Savoir déterminer graphiquement l'ensemble de définition d'une fonction :*



L'ensemble de définition de la fonction est l'ensemble des abscisses des points de la courbe.

$Df = [-6\,;\,4]$

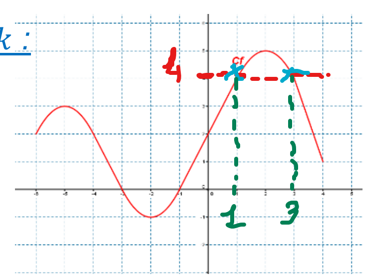
☑ *Savoir-faire : Savoir déterminer graphiquement l'image d'un nombre :*



L'image d'un nombre α par la fonction f est l'ordonnée du point de C_f et qui a pour abscisse α

$f(1) = 4$ $f(-5) = 3$ $f(-1) = 0$

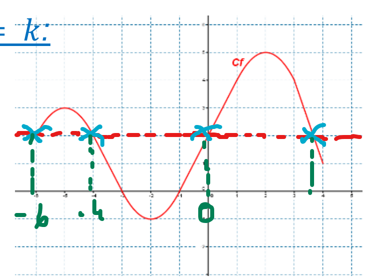
☑ *Savoir-faire : Savoir déterminer graphiquement les antécédents d'un nombre k :*



Les antécédents d'un nombre k par la fonction f sont les abscisses des points de C_f qui ont pour ordonnée k.

Déterminer les antécédents de 4 :
Donc 4 a deux antécédent qui sont 1 et 3.

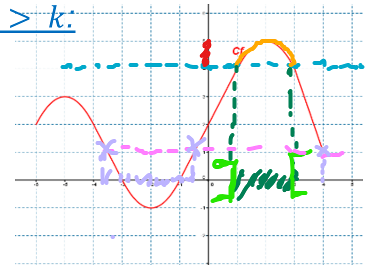
☑ *Savoir-faire : Savoir résoudre graphiquement une équation de la forme $f(x) = k$:*



Résoudre l'équation $f(x) = k$ revient à chercher Les antécédents du nombre k par la fonction f.

$(E) : f(x) = 2$ $S(E) = \{-6\,; -4\,; 0\,; 3{,}5\}$.

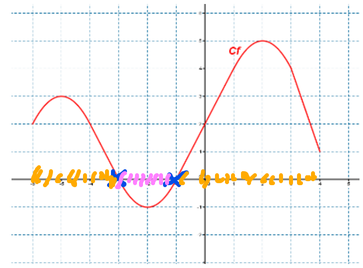
☑ Savoir-faire : Savoir résoudre graphiquement une inéquation de la forme $f(x) > k$:



(I_1) : $f(x) > 4$. $S(I_1) =]1 ; 3[$

(I_2) : $f(x) \leq 1$ $S(I_2) = [-3,5 ; -0,5] \cup \{4\}$

☑ Savoir-faire : Savoir établir graphiquement le tableau de signe d'une fonction :

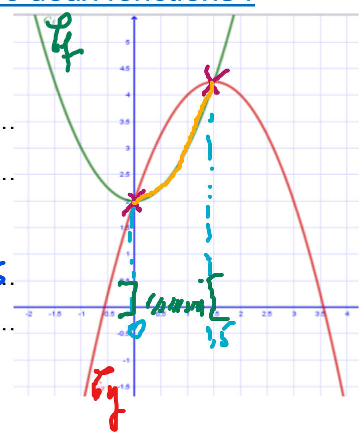


Dans un tableau de signes on peut lire : l'ensemble de définition : les solutions (E) : $f(x) = 0$ (I_1) $f(x) > 0$ (I_2) : $f(x) < 0$

Un Tableau de signes permet de connaître la position de la courbe par rapport à l'axe des abscisses.

x	-6		-3		-1		4
Signe de $f(x)$		+	0	−	0	+	

☑ Savoir-faire : Savoir résoudre graphiquement des équations inéquations avec deux fonctions :



Soit f et g les fonctions définies par $f(x) = x^2 + 2$ et $g(x) = -x^2 + 3x + 2$.

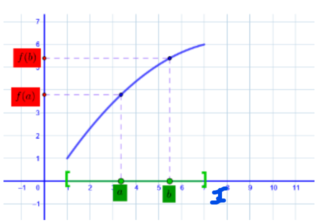
1) Résoudre graphiquement (E): $f(x) = g(x)$.

Les solutions de l'équation (E) : $f(x) = g(x)$ sont les abscisses des points d'intersection de C_f et de C_g. $S(E) = \{0 ; 1,5\}$.

2) Résoudre graphiquement (I): $f(x) < g(x)$.

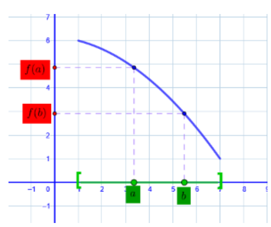
Les solutions de (I) sont les abscisses des points de C_f situés en dessous de C_g. Donc $S(I) =]0 ; 1,5[$.

IV. Sens de variation d'une fonction.



pour tout nombre a et b de I les images sont rangées dans le même ordre

si $a < b$ alors $f(a) < f(b)$



pour tous nombres a et b de I les images sont rangées dans l'ordre contraire

si $a < b$ alors $f(a) > f(b)$

Définition : Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

♦ Si pour tous réels a et b de I tels que $a \leq b$, on a $f(a) \leq f(b)$ alors on dit que la fonction f est croissante sur I. Les réels de l'intervalle I sont rangés dans le **même ordre** que leurs images.

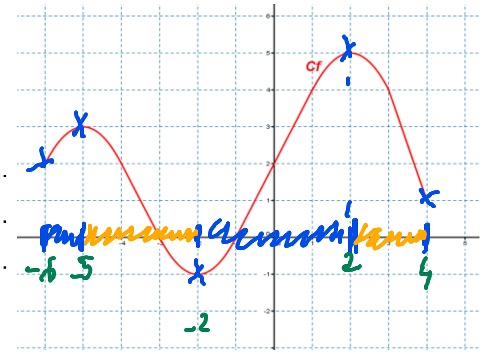
♦ Si pour tous réels a et b de I tels que $a \leq b$, on a $f(a) \geq f(b)$ alors on dit que la fonction f est décroissante sur I. Les réels de l'intervalle I sont rangés dans l'ordre **inverse** de leurs images.

♦ Dire que f est monotone sur I signifie que f est soit croissante sur I, soit décroissante sur I.

Remarque : Pour pouvoir dire qu'une fonction est croissante sur un intervalle I il faut être certain que l'ordre est conservé pour tous les nombres de I

$f(1) < f(2)$ n'est pas suffisant pour affirmer que f est croissante sur $[1 ; 2]$.

☑ Savoir-faire : Savoir décrire les variations d'une fonction :



Décrire les variations de la fonction f représentée ci-contre.

f est croissante sur $[-6 ; -5] \cup [-2 ; 2]$

f est décroissante sur $[-5 ; -2] \cup [2 ; 4]$.

☑ Savoir-faire : Savoir établir un tableau de variations :

On peut décrire les variations d'une fonction dans un tableau.

x	-6		-5		-2		2		4
Variations de f	2	↗	3	↘	-1	↗	5	↘	1

On indique que la fonction est croissante par une flèche ↗ qu'elle est décroissante par une flèche ↘.
On écrit les images des valeurs de x.

☑ Savoir-faire : Savoir utiliser un tableau de variations pour comparer des nombres :

Voici le tableau de variations d'une fonction f.

x	-4		-2	-1	0		3	4	5
f	-4	↗	1	↘	-1	↗	4	↘	-3

1) Compare $f(1)$ et $f(2)$.

1 et 2 appartiennent à $[0 ; 3]$ et $1 < 2$
f est croissante sur $[0 ; 3]$ donc $f(1) < f(2)$.

2) Compare $f(-1{,}5)$ et $f(-0{,}5)$.

$-1{,}5$ et $-0{,}5$ appartiennent à $[-2 ; 0]$ et $-1{,}5 < -0{,}5$
f est décroissante sur $[-2 ; 0]$ donc $f(-1{,}5) > f(-0{,}5)$

3) Compare $f(-1)$ et $f(4)$.

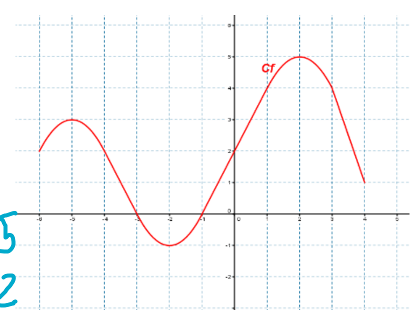
-1 et 4 n'appartiennent pas à un intervalle sur lequel f est monotone
donc on ne peut pas comparer $f(-1)$ et $f(4)$.

V. Extrémum d'une fonction.

Définition : Soit f une fonction de l'intervalle I. a et b deux nombres réels de I.

- Dire que f admet un maximum M en a de I signifie que $f(a) = M$ et $\forall\ x \in$ I, $f(x) \leq f(a)$.
- Dire que f admet un minimum m en b de I signifie que $f(b) = m$ et $\forall\ x \in$ I, $f(x) \geq f(b)$.

☑ Savoir-faire : Savoir déterminer les extrémums d'une fonction :



* le maximum de f sur $[-6 ; 4]$ est 5 atteint pour $x = 2$
* le minimum de f sur $[-6 ; 4]$ est -1 atteint pour $x = -2$

* le maximum de f sur $[-6 ; 0]$ est 3 atteint pour $x = -5$
* le minimum de f sur $[-6 ; 0]$ est -1 atteint pour $x = -2$