

EXERCICE 4

5 points

On considère l'algorithme suivant, où A et B sont des entiers naturels tels que $A < B$:

Entrées :	A et B entiers naturels tels que $A < B$
Variables :	D est un entier Les variables d'entrées A et B
Traitement :	Affecter à D la valeur de $B - A$ Tant que $D > 0$ B prend la valeur de A A prend la valeur de D Si $B > A$ Alors D prend la valeur de $B - A$ Sinon D prend la valeur de $A - B$ Fin Si Fin Tant que
Sortie :	Afficher A

1. On entre $A = 12$ et $B = 14$.

En remplissant le tableau donné en **annexe**, déterminer la valeur affichée par l'algorithme.

2. Cet algorithme calcule la valeur du PGCD des nombres A et B .

En entrant $A = 221$ et $B = 331$, l'algorithme affiche la valeur 1.

a. Justifier qu'il existe des couples $(x ; y)$ d'entiers relatifs solutions de l'équation

$$(E) \quad 221x - 331y = 1.$$

b. Vérifier que le couple $(3 ; 2)$ est une solution de l'équation (E).

En déduire l'ensemble des couples $(x ; y)$ d'entiers relatifs solutions de l'équation (E).

3. On considère les suites d'entiers naturels (u_n) et (v_n) définies pour tout entier naturel n par

$$u_n = 2 + 221n \quad \text{et} \quad \begin{cases} v_0 & = & 3 \\ v_{n+1} & = & v_n + 331 \end{cases}$$

a. Exprimer v_n en fonction de l'entier naturel n .

b. Déterminer tous les couples d'entiers naturels $(p ; q)$ tels que

$$u_p = v_q, \quad 0 \leq p \leq 500 \quad \text{et} \quad 0 \leq q \leq 500.$$