

## EXERCICE 3

5 points

L'espace est rapporté au repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . On désigne par  $\mathbb{R}$  l'ensemble des nombres réels.

On rappelle que deux droites de l'espace sont dites *perpendiculaires* si et seulement si elles sont orthogonales et sécantes.

Soient le point  $A_1$  de coordonnées  $(0; 2; -1)$  et le vecteur  $\vec{u}_1$  de coordonnées  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ .

On appelle  $D_1$  la droite passant par  $A_1$  et de vecteur directeur  $\vec{u}_1$ .

On appelle  $D_2$  la droite qui admet pour représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = 1 + k \\ y = -2k \\ z = 2 \end{cases} \quad (k \in \mathbb{R}).$$

Le but de l'exercice est de prouver l'existence d'une droite perpendiculaire à la fois à  $D_1$  et  $D_2$ .

1. a. Donner une représentation paramétrique de  $D_1$ .
- b. Donner un vecteur directeur de  $D_2$  (on le notera  $\vec{u}_2$ ).
- c. Le point  $A_2(-1; 4; 2)$  appartient-il à  $D_2$ ?
2. Démontrer que les droites  $D_1$  et  $D_2$  sont non coplanaires.
3. Soit le vecteur  $\vec{v} \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ . On définit la droite  $\Delta_1$  passant par  $A_1$  et de vecteur directeur  $\vec{v}$  et la droite  $\Delta_2$  passant par  $A_2$  et parallèle à  $\Delta_1$ .  
Justifier que les droites  $D_1$  et  $\Delta_1$  sont perpendiculaires.  
**Dans la suite, on admettra que les droites  $D_2$  et  $\Delta_2$  sont perpendiculaires.**
4. Soit  $P_1$  le plan défini par les droites  $D_1$  et  $\Delta_1$  et  $P_2$  le plan défini par les droites  $D_2$  et  $\Delta_2$ .
  - a. Soit le vecteur  $\vec{n} \begin{pmatrix} 17 \\ -22 \\ 9 \end{pmatrix}$ . Vérifier que  $\vec{n}$  est un vecteur normal au plan  $P_1$ .
  - b. Montrer que  $P_1$  et  $P_2$  ne sont pas parallèles.
5. Soit  $\Delta$  la droite d'intersection des plans  $P_1$  et  $P_2$ . On admettra que le vecteur  $\vec{v}$  est un vecteur directeur de  $\Delta$ .  
Utiliser les questions précédentes pour prouver qu'il existe une droite de l'espace perpendiculaire à la fois à  $D_1$  et à  $D_2$ .