BacS Nouvelle-Calédonie mars 2015

EXERCICE 4 — 5 points

On note (u_n) et (v_n) les suites réelles définies, pour tout entier naturel n, par

$$u_0 = 1 \quad v_0 = 0 \text{ et } \left\{\begin{array}{lll} u_{n+1} & = & \sqrt{3}u_n - v_n \\ v_{n+1} & = & u_n + \sqrt{3}v_n \end{array}\right. .$$

1. Calculer les valeurs de u_1, v_1, u_2, v_2.

2. On souhaite construire un algorithme qui affiche les valeurs de u_N et v_N pour un entier naturel N donné.

a. On donne l'algorithme suivant :

Entrée :	N est un nombre entier
Variables :	K est un nombre entier
	S est un nombre réel
	T est un nombre réel
Initialisation :	Affecter 1 à S
	Affecter 0 à T
	Affecter 0 à K
Traitement :	Tant que $K < N$
	Affecter $\sqrt{3}S - T$ à S
	Affecter $S + \sqrt{3}T$ à T
	Affecter $K + 1$ à K
	Fin Tant que
Sortie :	Afficher S
	Afficher T

Faire fonctionner cet algorithme pour $N = 2$. Pour cela, on recopiera et complétera le tableau de variables ci-dessous :

S	T	K
1	0	0
$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	1

b. L'algorithme précédent affiche t-il les valeurs de u_N et v_N pour un entier N donné ?
Dans le cas contraire, écrire sur la copie une version corrigée de l'algorithme proposé qui affiche bien les valeurs de u_N et v_N pour un entier N.

3. On pose, pour tout entier naturel n, $z_n = u_n + \mathrm{i}v_n$.
On note a le nombre complexe $a = \sqrt{3} + \mathrm{i}$.

a. Démontrer que, pour tout entier naturel n,

$$z_{n+1} = az_n.$$

b. Écrire a sous forme exponentielle.

c. En déduire que, pour tout entier naturel n,

$$\left\{\begin{array}{lll} u_n & = & 2^n \cos\left(\frac{n\pi}{6}\right) \\ v_n & = & 2^n \sin\left(\frac{n\pi}{6}\right) \end{array}\right.$$