Baccalauréat S Pondichéry 17 avril 2015

EXERCICE 1 4 points

Commun à tous les candidats

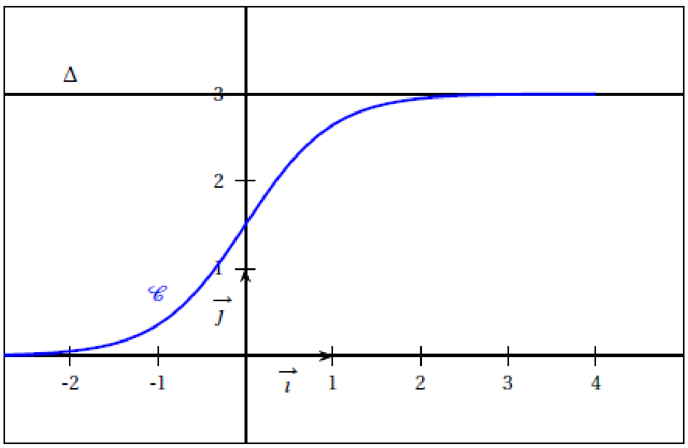
Commun à tous les candidats

Partie A

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{3}{1+e^{-2x}}.$$

Sur le graphique ci-après, on a tracé, dans un repère orthogonal $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$, la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f et la droite Δ d'équation $y = 3$.



1. Démontrer que la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
2. Justifier que la droite Δ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$.
3. Démontrer que l'équation $f(x) = 2,999$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$.
   Déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

Partie B

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = 3 - f(x)$.

1. Justifier que la fonction h est positive sur $\mathbb{R}$.
2. On désigne par H la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $H(x) = -\frac{3}{2}\ln\left(1+e^{-2x}\right)$.
   Démontrer que H est une primitive de h sur $\mathbb{R}$.
3. Soit a un réel strictement positif.
   a. Donner une interprétation graphique de l'intégrale $\int_0^a h(x)\,dx$.
   b. Démontrer que $\int_0^a h(x)\,dx = \frac{3}{2}\ln\left(\frac{2}{1+e^{-2a}}\right)$.
   c. On note $\mathscr{D}$ l'ensemble des points $M(x\,;\,y)$ du plan défini par
   $$\left\{\begin{array}{lll} x & \geqslant & 0 \\ f(x) & \leqslant y & \leqslant 3 \end{array}\right.$$
   Déterminer l'aire, en unité d'aire, du domaine $\mathscr{D}$.*