

EXERCICE 4

5 points

Candidat ayant suivi l'enseignement de spécialité

Les nombres de la forme $2^n - 1$ où n est un entier naturel non nul sont appelés **nombres de Mersenne**.

1. On désigne par a , b et c trois entiers naturels non nuls tels que $\text{PGCD}(b; c) = 1$.

Prouver, à l'aide du théorème de Gauss, que :

si b divise a et c divise a alors le produit bc divise a .

2. On considère le nombre de Mersenne $2^{33} - 1$.
Un élève utilise sa calculatrice et obtient les résultats ci-dessous.

$(2^{33} - 1) \div 3$	2863311530
$(2^{33} - 1) \div 4$	2147483648
$(2^{33} - 1) \div 12$	715827882,6

Il affirme que 3 divise $(2^{33} - 1)$ et 4 divise $(2^{33} - 1)$ et 12 ne divise pas $(2^{33} - 1)$.

- En quoi cette affirmation contredit-elle le résultat démontré à la question 1.?
- Justifier que, en réalité, 4 ne divise pas $(2^{33} - 1)$.
- En remarquant que $2 \equiv -1 \pmod{3}$, montrer que, en réalité, 3 ne divise pas $2^{33} - 1$.
- Calculer la somme $S = 1 + 2^3 + (2^3)^2 + (2^3)^3 + \dots + (2^3)^{10}$.
- En déduire que 7 divise $2^{33} - 1$.

3. On considère le nombre de Mersenne $2^7 - 1$. Est-il premier? Justifier.
4. On donne l'algorithme suivant où $\text{MOD}(N, k)$ représente le reste de la division euclidienne de N par k .

Variables :	n entier naturel supérieur ou égal à 3 k entier naturel supérieur ou égal à 2
Initialisation :	Demander à l'utilisateur la valeur de n . Affecter à k la valeur 2.
Traitement :	Tant que $\text{MOD}(2^n - 1, k) \neq 0$ et $k \leq \sqrt{2^n - 1}$ Affecter à k la valeur $k + 1$ Fin de Tant que.
Sortie :	Afficher k . Si $k > \sqrt{2^n - 1}$ Afficher « CAS 1 » Sinon Afficher « CAS 2 » Fin de Si

- Qu'affiche cet algorithme si on saisit $n = 33$? Et si on saisit $n = 7$?
- Que représente le CAS 2 pour le nombre de Mersenne étudié? Que représente alors le nombre k affiché pour le nombre de Mersenne étudié?
- Que représente le CAS 1 pour le nombre de Mersenne étudié?*