Convexité d'une fonction.

Johan Jensen *(1859 ; 1925) mathématicien danois ingénieur dans une entreprise de télécommunication. Il est surtout connu pour ses travaux en analyse, en particulier sur les fonctions convexes.*

I. Dérivée seconde d'une fonction.

Définition : Soit une fonction f dérivable sur un intervalle I et f' sa fonction dérivée.
On dit que la fonction f est deux fois dérivable sur I si f' est dérivable sur I
On note f'' la dérivée f' et on l'appelle la fonction dérivée seconde de f .

☑ *Savoir-faire : Savoir déterminer l'expression d'une dérivée seconde :*

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^3 - 5x^2 + e^x$. Détermine l'expression de f''.

$f'(x) = 9x^2 - 10x + e^x$

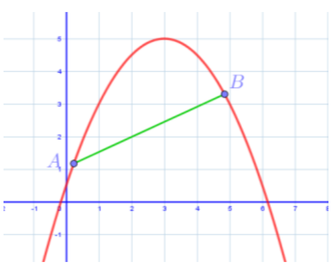
$f''(x) = 18x - 10 + e^x$

II. Convexité d'une fonction.

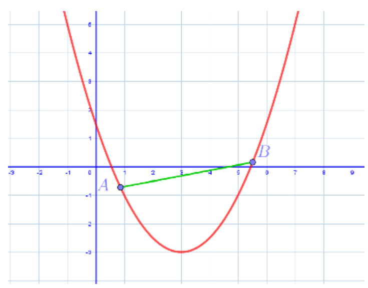
☺ Fonctions convexes, fonctions concaves.

Définition : Soit une fonction f définie sur un intervalle I et C_f sa courbe représentative.
☺ On dit que la fonction f est concave sur I si pour tous nombres a et b de I, la portion de C_f située entre $A(a; f(a))$ et $B(b; f(b))$ est située au dessus de la droite (AB).
☺ On dit que la fonction f est convexe sur I si pour tous nombres a et b de I, la portion de C_f située entre $A(a; f(a))$ et $B(b; f(b))$ est située au dessous de la droite (AB).

Exemples:



la portion de la courbe est au dessus de (AB) Donc la fonction est concave.



la portion de la courbe est au dessous de (AB) Donc la fonction est convexe.

Étudier la convexité d'une fonction revient à déterminer les intervalles sur lesquels elle est convexe et ceux sur lesquels elle est concave.

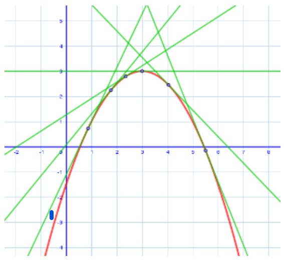
Propriété :
☺ La fonction carrée $x \longmapsto x^2$ est convexe sur $\mathbb{R}$.
☺ La fonction cube $x \longmapsto x^3$ est concave sur $]-\infty;0[$ et convexe sur $]0;+\infty[$.
☺ La fonction inverse $x \longmapsto \frac{1}{x}$ est concave sur $]-\infty;0[$ et convexe sur $]0;+\infty[$.
☺ La fonction racine carrée $x \longmapsto \sqrt{x}$ est concave sur $[0;+\infty[$
☺ La fonction exponentielle $x \longmapsto e^x$ est convexe sur $\mathbb{R}$.

Propriété : Soit une fonction f définie sur un intervalle I et C_f sa courbe représentative.

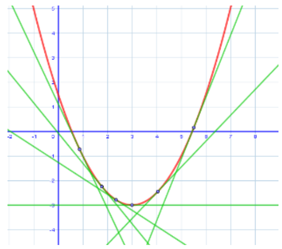
☺ La fonction f est convexe sur I si sa courbe représentative est entièrement située au-dessus de chacune de ses tangentes, sur l'intervalle I.

☺ La fonction f est concave sur I si sa courbe représentative est entièrement située en dessous de de chacune de ses tangentes, sur l'intervalle I.

Exemples :



La courbe est sous les tangentes la fonction est concave



la courbe est sur les tangentes la fonction est convexe.

Propriété : Soit une fonction f définie et deux fois dérivable sur un intervalle I.

☺ f est convexe sur $\mathrm{I} \Leftrightarrow f'$ est croissante sur $\mathrm{I} \Leftrightarrow f''(x) \geq 0$, pour tout x de I.

☺ f est concave sur $\mathrm{I} \Leftrightarrow f'$ est décroissante sur $\mathrm{I} \Leftrightarrow f''(x) \leq 0$, pour tout x de I.

Démonstration exigible :

Soit $a \in I$, $T_A : y = f'(a)(x-a) + f(a)$ l'équation de la tangente à C_f en $A(a\,;f(a))$

On suppose que f' est croissante sur I.

On pose $d(x) = f(x) - (f'(a)(x-a) + f(a))$

$d'(x) = f'(x) - f'(a)$

donc d' est croissante sur I

et $d'(a) = 0$

donc

x		a	
signe de $d'(x)$	$-$	0	$+$
variations de $d(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$

or $d(a) = 0$

Donc $d(x) \geq 0$ $\forall x \in I$

Donc C_f est au dessus des tangentes donc f est convexe.

☑ *Savoir-faire : Savoir étudier la convexité d'une fonction :*

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 9x^2 + 4$. Étudier la convexité de la fonction f.

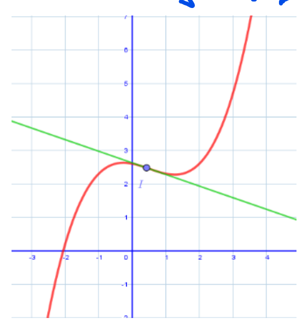
$f'(x) = x^2 - 18x$

$f''(x) = 2x - 18$

$f''(x) \geq 0$ sur $[9\,;+\infty[$ Donc f est convexe sur $[9\,;+\infty[$

$f''(x) \leq 0$ sur $]-\infty\,;9]$ Donc f est concave sur $]-\infty\,;9]$

☺ Point d'inflexion.



Définition : Soit une fonction f dérivable sur un intervalle I.
Un point d'inflexion est un point où la courbe traverse sa tangente en ce point.

Remarque : Au point d'inflexion, la fonction change de convexité.

☑ *Savoir-faire : Savoir déterminer le point d'inflexion d'une fonction :*

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 9x^2 + 4$. Détermine le point d'inflexion de f.

On a vu que

x	$-\infty$		9		$+\infty$
signe de $f''(x)$		$-$	0	$+$	

Donc C_f admet un point d'inflexion qui a pour abscisse $x = 9$. (f change de convexité).

☺ Applications de la convexité.

☑ *Savoir-faire : Savoir étudier la convexité pour résoudre un problème:*

Une entreprise fabrique des clés USB avec un maximum de 10 000 par mois.
Le coût de fabrication C (en milliers d'euros) de x milliers de clés produites s'exprime par :
$C(x) = 0{,}05x^3 - 1{,}05x^2 + 8x + 4$.
1) À l'aide de la calculatrice graphique, conjecturer la convexité de la fonction C.
En déduire si la courbe possède un point d'inflexion.
2) Démontrer ces résultats.
3) Interpréter les résultats obtenus au regard du contexte de l'exercice.

1) On conjecture que f a l'air convexe sur $]-\infty ; 7]$ et concave sur $[7 ; +\infty[$.
On en déduit que la courbe possède un point d'inflexion en :

2) $C'(x) = 0{,}15x^2 - 2{,}1x + 8$

$C''(x) = 0{,}3x - 2{,}1$

x	$-\infty$		7		$+\infty$
Signe de $C''(x)$		$-$	0	$+$	
Convexité de C		Concave		Convexe.	

Le point $(7 ; 25{,}7)$ est un point d'inflexion de C_f.

3) • Avant le point d'inflexion la fonction est concave, la croissance du coût de fabrication ralentit.
• Après le point d'inflexion la fonction est convexe, la croissance du coût de fabrication s'accélère.
⇒ A partir de 7000 clés fabriquées la croissance du coût de fabrication s'accélère.

☑ *Savoir-faire : Savoir prouver une inégalité en utilisant la convexité d'une fonction:*

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 2x^2$.
a) Étudier la convexité de la fonction f.
b) Déterminer l'équation de la tangente à la fonction f en –1.
c) En déduire que pour tout réel x négatif, on a : $x^3 - 2x^2 \leq 7x + 4$.

a) f est dérivable sur $\mathbb{R}$

$f'(x) = 3x^2 - 4x$

$f''(x) = 6x - 4$

x	$-\infty$		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
Signe de $f''(x)$		$-$	0	$+$	
Convexité de f		concave		convexe.	

Donc f est concave sur $]-\infty ; \frac{2}{3}]$ et convexe sur $[\frac{2}{3} ; +\infty[$.

b) $A(-1 ; -3)$ $T_A : y = f'(-1)(x+1) + f(-1)$
$y = 7(x+1) - 3$
$y = 7x + 4$

c) Sur $]-\infty ; 0]$ f est concave. Donc C_f est au dessous des tangentes donc en particulier pour la tangente en -1, donc
$\forall x \in]-\infty ; 0]$ $f(x) \leq 7x + 4$.