Convexité d'une fonction.

Johan Jensen *(1859 ; 1925) mathématicien danois ingénieur dans une entreprise de télécommunication. Il est surtout connu pour ses travaux en analyse, en particulier sur les fonctions convexes.*

I. Dérivée seconde d'une fonction.

Définition : Soit une fonction f dérivable sur un intervalle I et f' sa fonction dérivée.
On dit que la fonction f est deux fois dérivable sur I si f' est dérivable sur I
On note f'' la dérivée f' et on l'appelle la fonction dérivée seconde de f .

☑ *Savoir-faire : Savoir déterminer l'expression d'une dérivée seconde :*

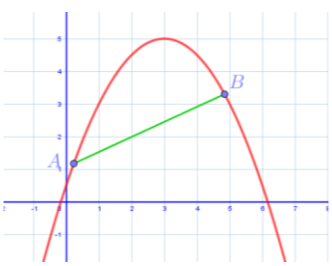
Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^3 - 5x^2 + e^x$. Détermine l'expression de f''.
....
....

II. Convexité d'une fonction.

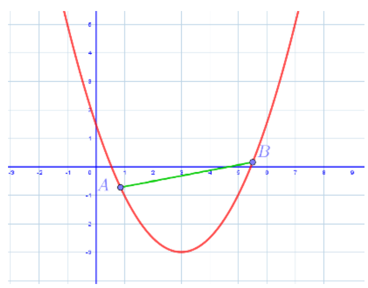
☺ Fonctions convexes, fonctions concaves.

Définition : Soit une fonction f définie sur un intervalle I et C_f sa courbe représentative.
☺ On dit que la fonction f est .... sur I si pour tous nombres a et b de I, la portion de C_f située entre $A(a; f(a))$ et $B(b; f(b))$ est située ....de la droite (AB).
☺ On dit que la fonction f est .... sur I si pour tous nombres a et b de I, la portion de C_f située entre $A(a; f(a))$ et $B(b; f(b))$ est située ....de la droite (AB).

Exemples:



....
....
....
....
....
....
....



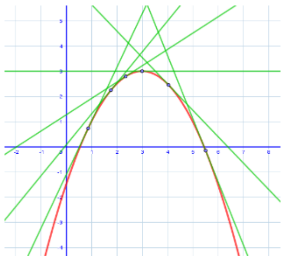
....
....
....
....
....
....
....

Étudier la convexité d'une fonction revient à déterminer les intervalles sur lesquels elle est convexe et ceux sur lesquels elle est concave.

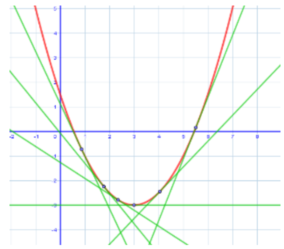
Propriété :
☺ La fonction carrée $x \longmapsto x^2$ est ....
☺ La fonction cube $x \longmapsto x^3$ est ....
☺ La fonction inverse $x \longmapsto \frac{1}{x}$ est ....
☺ La fonction racine carrée $x \longmapsto \sqrt{x}$ est ....
☺ La fonction exponentielle $x \longmapsto e^x$ est ....

Propriété : Soit une fonction f définie sur un intervalle I et C_f sa courbe représentative.
☺ La fonction f est .... sur I si sa courbe représentative est entièrement située au-dessus de chacune de ses tangentes, sur l'intervalle I.
☺ La fonction f est .... sur I si sa courbe représentative est entièrement située en dessous de de chacune de ses tangentes, sur l'intervalle I.

Exemples :



....
....
....
....
....



....
....
....
....
....

Propriété : Soit une fonction f définie et deux fois dérivable sur un intervalle I.
☺ f est convexe sur $\mathrm{I} \Leftrightarrow f'$ est croissante sur $\mathrm{I} \Leftrightarrow f''(x) \geq 0$, pour tout x de I.
☺ f est concave sur $\mathrm{I} \Leftrightarrow f'$ est décroissante sur $\mathrm{I} \Leftrightarrow f''(x) \leq 0$, pour tout x de I.

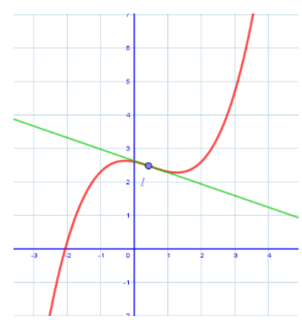
Démonstration exigible :

....
....
....
....
....
....

☑ *Savoir-faire : Savoir étudier la convexité d'une fonction :*

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 9x^2 + 4$. Étudier la convexité de la fonction f.
....
....
....

☺ Point d'inflexion.



Définition : Soit une fonction f dérivable sur un intervalle I.
Un point d'inflexion est un point où la courbe traverse sa tangente en ce point.

Remarque : Au point d'inflexion, la fonction change de convexité.

☑ *Savoir-faire : Savoir déterminer le point d'inflexion d'une fonction :*

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 9x^2 + 4$. Détermine le point d'inflexion de f.
....
....
....

☺ Applications de la convexité.

☑ *Savoir-faire : Savoir étudier la convexité pour résoudre un problème:*

Une entreprise fabrique des clés USB avec un maximum de 10 000 par mois.
Le coût de fabrication C (en milliers d'euros) de x milliers de clés produites s'exprime par :
$C(x) = 0{,}05x^3 - 1{,}05x^2 + 8x + 4$.
1) À l'aide de la calculatrice graphique, conjecturer la convexité de la fonction C.
En déduire si la courbe possède un point d'inflexion.
2) Démontrer ces résultats.
3) Interpréter les résultats obtenus au regard du contexte de l'exercice.

☑ *Savoir-faire : Savoir prouver une inégalité en utilisant la convexité d'une fonction:*

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 2x^2$.
a) Étudier la convexité de la fonction f.
b) Déterminer l'équation de la tangente à la fonction f en –1.
c) En déduire que pour tout réel x négatif, on a : $x^3 - 2x^2 \leq 7x + 4$.