3) Inégalités

Propriété

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I ; a et b deux réels de I avec $a \leq b$.

a) Si, pour tout x de $[a;b]$, $f(x) \geq 0$, alors $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$

b) Si, pour tout x de $[a;b]$, $f(x) \geq g(x)$, alors $\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx$

Démonstration:

....

....

....

....

☑*Savoir-faire : Savoir encadrer une intégrale.*

a) Démontrer que pour tout x de [0 ; 1], on a $0 \leq e^{x^2} \leq e^x$.

b) En déduire que $0 \leq \int_0^1 e^{x^2}\,dx \leq e-1$.

....

....

....

....

....

....

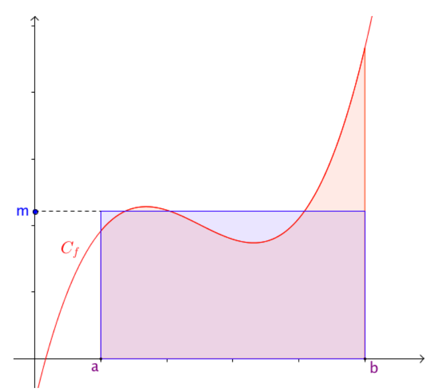
III. Valeur moyenne d'une fonction.

Définition

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle [a ; b] avec $a \neq b$.

On appelle valeur moyenne de f sur [a ; b] le nombre réel $m = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$.

Interprétation géométrique :



L'aire sous la courbe représentative de f (en rouge ci-dessous) est égale à l'aire sous la droite d'équation $y = m$ (en bleu).

Exemple :

Calculons la valeur moyenne de la fonction f définie par $f(x) = 3x^2 - 4x + 5$ sur l'intervalle [0 ; 10].

....

....

....

....

....

....