Fonction dérivée.

Joseph Louis Lagrange (1736 ; 1813) *introduit le mot « dérivé » pour signifier que cette nouvelle fonction dérive (au sens de "provenir") d'une autre fonction.*

I. Définition.

Définition : Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On dit que f est dérivable sur I si elle est dérivable en tout réel x de I. Dans ce cas, la fonction qui à tout réel x de I associe le nombre dérivé de f en x est appelée fonction dérivée de f et se note f'. $f' : x \to f'(x)$.

II. Fonctions dérivées des fonctions de référence.

Propriété : La dérivée de la fonction carrée, $f : x \to x^2$ est la fonction ....

Démonstration exigible :

....
....
....
....

Propriété : La dérivée de la fonction inverse, $f : x \to \frac{1}{x}$ est la fonction ....

Démonstration exigible :

....
....
....
....

On pourrait montrer de même que :

- $f : x \to k$, *($\forall\, k \in$ R) est dérivable sur .... et sa fonction dérivée est ....*
- $f : x \to mx$, *($\forall\, m \in$ R) est dérivable sur .... et sa fonction dérivée est ....*
- $f : x \to x^n$, *($\forall\, n \in$ N*) est dérivable sur .... et sa fonction dérivée est ....*
- $f : x \to \frac{1}{x^n}$ *, ($\forall\, n \in$ N*) est dérivable sur .... et sa fonction dérivée est ....*
- $f : x \to \sqrt{x}$, *est dérivable sur .... et sa fonction dérivée est ....*

☺ Cas particulier de la fonction valeur absolue.

Définition : La fonction valeur absolue $x \to |x|$ est définie sur R par :

♦ Si x est positif, ...   ♦ Si x est positif, ...

....

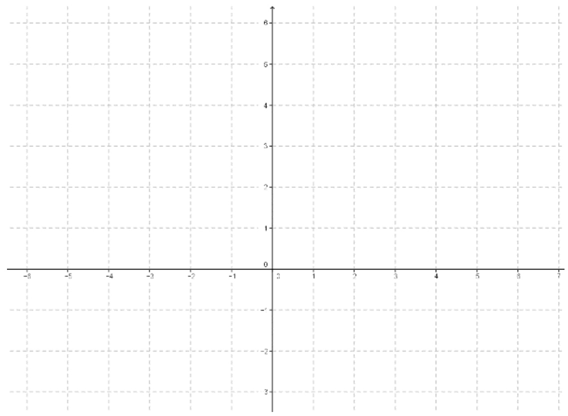
....

....

....

x	
Variations de f	

x	
signes de f	



<u>*Remarques :*</u>

....

....

Propriété : La fonction valeur absolue n'est pas dérivable en zéro.

....

....

....

<u>III. Opération sur les fonctions dérivées.</u>

☺ Dérivées de sommes, produits et quotients de fonctions.

Exemple : Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + x$. Déterminons sa fonction dérivée.

....

....

....

En posant $u(x) =$ .... et $v(x) =$ .... , on a $f(x) =$ ....

....

....

Propriété : Soit u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I, alors la fonction $u + v$ est dérivable sur I et on a : ....

Exemple : Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + x^4$. Déterminons sa fonction dérivée.

....

Propriété : Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I, et k un nombre réel alors la fonction ku est dérivable sur I et on a : ....

Exemple : Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 - 2x + 5$. Déterminons $f'(x)$.

....

....

Propriété : Soit u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I, alors la fonction $u.v$ est dérivable sur I et on a : ....

Démonstration exigible :

....

....

....

....

....

Propriété : Soit u une fonction dérivable et non nulle sur un intervalle I, alors la fonction $\frac{1}{u}$ est dérivable sur I et on a : ....

Exemple : Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{3x^2+1}$. Déterminons $f'(x)$.

....

....

Propriété : Soit u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I, v ne s'annulant pas sur I, alors la fonction $\frac{u}{v}$ est dérivable sur I et on a ....

Exemple : Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{2x-5}{x^2+1}$. Déterminons $f'(x)$.

....

....

....

☑*Savoir-faire : Savoir dériver des sommes, produits ou quotients de fonctions :*

Détermine les fonctions dérivées des fonctions suivantes.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

☺ Dérivée d'une fonction composée.

Propriété : Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I alors la fonction $f(mx+p)$ est dérivable sur I et on a : ....

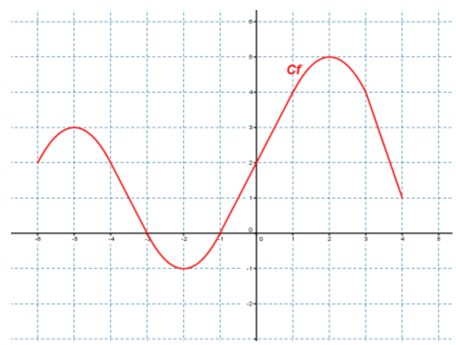
Exemple : ....
....
....

IV. Applications des fonctions dérivées.

☺ Fonctions dérivées et sens de variation.

☑*Savoir-faire : Savoir déterminer graphiquement le signe d'une dérivée :*

On donne ci-contre la courbe représentative C_f d'une fonction f.



1) Résoudre les équations et inéquations suivantes :

♦ $f(x) = 0$.

....
....

♦ $f'(x) = 0$.

....
....

2) Complète les tableaux suivants :

x	
Signes de $f'(x)$	

x	
Variations de f	

Propriété : Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

♦ Si $\forall x \in$ I , $f'(x) > 0$, alors ....

♦ Si $\forall x \in$ I , $f'(x) < 0$, alors ....

☑*Savoir-faire : Savoir étudier une fonction polynôme du 3° degré :*

On considère la fonction f définie sur IR par $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 4$.

1) Déterminer $f'(x)$:...

2) Déterminer le signes de $f'(x)$. En déduire le tableau de variations de f.

....
....
....
....
....
....

x	

☑ *Savoir-faire : Savoir étudier une fonction rationnelle :*

On considère la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2-2x}$.

1) Déterminer l'ensemble de définition de f.

……

……

2) Déterminer $f'(x)$:…………………………………………………………………………

……

……

3) Déterminer le signes de $f'(x)$. En déduire le tableau de variations de f.

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

x	

☺ Fonctions dérivées et extremums.

Propriété : Soit une fonction f définie et dérivable sur un intervalle ouvert I. Si la dérivée f' de f s'annule et change de signe en un réel c de I alors f admet un extremum en $x = c$.

Exemple : La fonction f définie sur R par $f(x) = 3x^2 - 2x + 5$ admet-elle un extremum ?

……

……

……

……

☺ Étudier la position relative de deux courbes.

Exemple : Soit f et g deux fonctions définies sur R par : $f(x) = x^3$ et $g(x) = -5x + 18$.

1) Montre que 2 est solution de l'équation $x^3 + 5x - 18 = 0$

……

2) Étudie la position relative de Cf et de Cg.

……

……

……

……

……

……

……

……

……