Fonctions composées.

***Jean Bernoulli** (1667 ; 1748) donne en 1718 une première définition de la notion de fonction :*
« On appelle fonction d'une grandeur variable une quantité composée de quelques manières que ce soit de cette grandeur variable et de constantes. »

I. Définition.

Définition : Soient f et g deux fonctions d'ensembles de définition respectifs D_f et D_g.
La composée de f par g, notée $g \circ f$, est la fonction définie par $(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big)$.
L'ensemble de définition de $g \circ f$ est l'ensemble des réels x appartenant à D_f dont l'image par f appartient à D_g.

$g \circ f : x \qquad f(x) \qquad g\big(f(x)\big)$

☑ *Savoir-faire : Savoir composer deux fonctions :*

On considère les fonctions f et g définies par : $f(x) = \frac{1}{x+1}$ et $g(x) = \sqrt{x}$.
Exprimer les fonctions $f \circ g$ et $g \circ f$ en fonction de x.
....
....
....
....

Remarque :
....
....
....

II. Limite d'une fonction composée.

Propriété : a, b et c peuvent désigner $+\infty$ ou $-\infty$ ou un nombre réel.
Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ et $\lim\limits_{x \to b} g(x) = c$ alors $\lim\limits_{x \to a} g(f(x)) = \lim\limits_{X \to b} g(X) = c$

☑ *Savoir-faire : Savoir déterminer la limite d'une fonction composée :*

Soit la fonction h définie sur $\left]\frac{1}{2} ; +\infty\right[$ par : $h(x) = \sqrt{2 - \frac{1}{x}}$
Calculer la limite de la fonction h en $+\infty$.
....
....
....
....
....
....

III. Dérivée d'une fonction composée.

Propriété : Soient f et g deux fonctions telles que $\forall x \in D_f$, $f(x) \in D_g$
La fonction $h = g \circ f$ est dérivable sur D_f et on a : $h'(x) = (g \circ f)'(x) = f'(x) \times g'(f(x))$.

☑ *Savoir-faire : Savoir déterminer la dérivée d'une fonction composée :*

Soit h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = (4x - 5)^3$. Détermine $h'(x)$.

....
....
....

Propriétés : Soit u une fonction

☺ $x \to \sqrt{u}$ *définie sur* $\{x \in \mathbb{R} \ / \ u(x) \geq 0\}$ *est dérivable sur* $\{x \in \mathbb{R} \ / \ u(x) > 0\}$ *et* $\left(\sqrt{u}\right)' =$.....................

☺ $x \to u^n$ $(n \in \mathbb{Z}^*)$ *définie et dérivable sur* $si\ n < 0 ; \{x \in \mathbb{R} \ / \ u(x) \neq 0\}$ *et* $(u^n)' =$ ....

☺ $x \to e^u$ *définie et dérivable sur* $\{x \in \mathbb{R} \ / \ u(x)\ existe\}$ *et* $(e^u)' =$ ....

☑ *Savoir-faire : Savoir déterminer la dérivée d'une fonction composée :*

Déterminer la dérivée des fonctions définies par :

☺ $f_1(x) = \sqrt{3x^2 + 4x - 1}$ ☺ $f_2(x) = (2x^2 + 3x - 3)^4$ ☺ $f_3(x) = 2e^{\frac{1}{x}}$

....
....
....
....
....
....
....
....

IV. Étude d'une fonction composée.

☑ *Savoir-faire : Savoir déterminer la dérivée d'une fonction composée :*

Étudie la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{\frac{2}{3x+1}}$

....
....
....
....
....
....
....
....

……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………

V. Étude d'une fonction composée avec l’exponentielle.

☑ *Savoir-faire : Savoir déterminer la limite d'une fonction composée avec l’exponentielle :*

Calculer les limites : ☺ $\lim\limits_{x \to +\infty} x + e^{-3x}$ ☺ $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{1-\frac{1}{x}}$

……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………

☑ *Savoir-faire : Savoir dériver une fonction composée avec l’exponentielle :*

Détermine les expressions des fonctions dérivées : ☺ $f_1(x) = 3e^{x^2+1}$ ☺ $f_2(x) = xe^{\frac{1}{x}}$

……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………

☑ *Savoir-faire : Savoir déterminer la dérivée d’une fonction composée :*

Étudie la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^{-\frac{x}{2}}$.

……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………