8

Baccalauréat S Liban 27 mai 2014

EXERCICE 3 5 points

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par

$$f(x) = x\mathrm{e}^{-x}.$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal.

Partie A

1. On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $[0; +\infty[$.
   Pour tout réel x de l'intervalle $[0 ; +\infty[$, calculer $f'(x)$. En déduire les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.
2. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$. Quelle interprétation graphique peut-on faire de ce résultat ?

Partie B

Soit $\mathscr{A}$ la fonction définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ de la façon suivante : pour tout réel t de l'intervalle $[0 ; +\infty[$, $\mathscr{A}(t)$ est l'aire, en unités d'aire, du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}$ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = t$.

1. Déterminer le sens de variation de la fonction $\mathscr{A}$.
2. On admet que l'aire du domaine délimité par la courbe $\mathscr{C}$ et l'axe des abscisses est égale à 1 unité d'aire. Que peut-on en déduire pour la fonction $\mathscr{A}$?
3. On cherche à prouver l'existence d'un nombre réel α tel que la droite d'équation $x = \alpha$ partage le domaine compris entre l'axe des abscisses et la courbe $\mathscr{C}$, en deux parties de même aire, et à trouver une valeur approchée de ce réel.
   a. Démontrer que l'équation $\mathscr{A}(t) = \dfrac{1}{2}$ admet une unique solution sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$
   b. Sur le graphique fourni en annexe (***à rendre avec la copie***) sont tracées la courbe $\mathscr{C}$, ainsi que la courbe Γ représentant la fonction $\mathscr{A}$.
   Sur le graphique de l'annexe, identifier les courbes $\mathscr{C}$ et Γ, puis tracer la droite d'équation $y = \dfrac{1}{2}$. En déduire une valeur approchée du réel α.
   Hachurer le domaine correspondant à $\mathscr{A}(\alpha)$.
4. On définit la fonction g sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par

$$g(x) = (x+1)\,\mathrm{e}^{-x}.$$

   a. On note g' la fonction dérivée de la fonction g sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.
   Pour tout réel x de l'intervalle $[0 ; +\infty[$, calculer $g'(x)$.
   b. En déduire, pour tout réel t de l'intervalle $[0 ; +\infty[$, une expression de $\mathscr{A}(t)$.
   c. Calculer une valeur approchée à 10^{-2} près de $\mathscr{A}(6)$.