

EXERCICE 3

7 points

Soit a un nombre réel fixé non nul.

Le but de cet exercice est d'étudier la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = a \quad \text{et, pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = e^{2u_n} - e^{u_n}.$$

On remarquera que cette égalité peut aussi s'écrire : $u_{n+1} = e^{u_n} (e^{u_n} - 1)$.

1. Soit g la fonction définie pour tout réel x par :

$$g(x) = e^{2x} - e^x - x.$$

- Calculer $g'(x)$ et prouver que, pour tout réel x : $g'(x) = (e^x - 1)(2e^x + 1)$.
- Déterminer les variations de la fonction g et donner la valeur de son minimum.
- En remarquant que $u_{n+1} - u_n = g(u_n)$, étudier le sens de variation de la suite (u_n) .

2. Dans cette question, on suppose que $a \leq 0$.

- Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $u_n \leq 0$.
- Déduire des questions précédentes que la suite (u_n) est convergente.
- Dans le cas où a vaut 0, donner la limite de la suite (u_n) .

3. Dans cette question, on suppose que $a > 0$.

La suite (u_n) étant croissante, la question 1. permet d'affirmer que, pour tout entier naturel n , $u_n \geq a$.

- Démontrer que, pour tout entier naturel n , on a : $u_{n+1} - u_n \geq g(a)$.
- Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a :
 $u_n \geq a + n \times g(a)$.
- Déterminer la limite de la suite (u_n) .

4. Dans cette question, on prend $a = 0,02$.

L'algorithme suivant a pour but de déterminer le plus petit entier n tel que $u_n > M$, où M désigne un réel positif. Cet algorithme est incomplet.

Variables	n est un entier, u et M sont deux réels
Initialisation	u prend la valeur 0,02 n prend la valeur 0 Saisir la valeur de M
Traitement	Tant que Fin tant que
Sortie	Afficher n

- Sur la copie, recopier la partie « Traitement » en la complétant.
- À l'aide de la calculatrice, déterminer la valeur que cet algorithme affichera si $M = 60$.*