

## EXERCICE 4

5 points

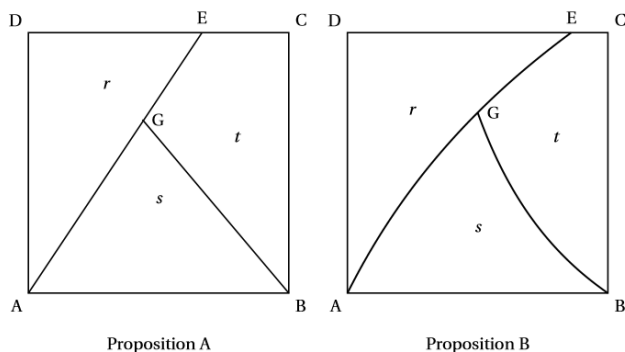
Les parties A et B sont indépendantes

Le fabricant de cadenas de la marque « K » désire imprimer un logo pour son entreprise.

Ce logo a la forme d'une lettre majuscule K stylisée, inscrite dans un carré ABCD, de côté une unité de longueur, et respectant les conditions C1 et C2 suivantes :

- Condition C1 : la lettre K doit être constituée de trois lignes :
  - une des lignes est le segment [AD] ;
  - une deuxième ligne a pour extrémités le point A et un point E du segment [DC] ;
  - la troisième ligne a pour extrémité le point B et un point G situé sur la deuxième ligne.
- Condition C2 : l'aire de chacune des trois surfaces délimitées par les trois lignes dessinées dans le carré doit être comprise entre 0,3 et 0,4, l'unité d'aire étant celle du carré. Ces aires sont notées  $r$ ,  $s$ ,  $t$  sur les figures ci-après.

Un atelier de design propose deux dessins possibles, représentés ci-dessous :



Pour mener les études qui suivent, on se place dans le repère orthonormé  $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$ .

### Partie A : étude de la proposition A

Dans cette proposition les trois lignes sont des segments et les trois aires sont égales :

$$r = s = t = \frac{1}{3}.$$

Déterminer les coordonnées des points E et G.

### Partie B : étude de la proposition B

Cette proposition est caractérisée par les deux modalités suivantes :

- la ligne d'extrémités A et E est une portion de la représentation graphique de la fonction  $f$  définie pour tout réel  $x \geq 0$  par :  $f(x) = \ln(2x + 1)$  ;
- la ligne d'extrémités B et G est une portion de la représentation graphique de la fonction  $g$  définie pour tout réel  $x > 0$  par :  $g(x) = k \left( \frac{1-x}{x} \right)$ , où  $k$  est un réel positif qui sera déterminé.

1. a. Déterminer l'abscisse du point E.
  - b. Déterminer la valeur du réel  $k$ , sachant que l'abscisse du point G est égale à 0,5.
2. a. Démontrer que la fonction  $f$  admet pour primitive la fonction  $F$  définie pour tout réel  $x \geq 0$  par :

$$F(x) = (x + 0,5) \times \ln(2x + 1) - x.$$

- b. Démontrer que  $r = \frac{e}{2} - 1$ .
3. Déterminer une primitive  $G$  de la fonction  $g$  sur l'intervalle  $]0 : +\infty[$ .
  4. On admet que les résultats précédents permettent d'établir que

$$s = [\ln(2)]^2 + \frac{\ln(2) - 1}{2}.$$

La proposition B remplit-elle les conditions imposées par le fabricant ?\*