

EXERCICE 4

5 points

Dans cet exercice, on s'intéresse aux triplets d'entiers naturels non nuls (x, y, z) tels que

$$x^2 + y^2 = z^2.$$

Ces triplets seront nommés « triplets pythagoriciens » en référence aux triangles rectangles dont ils mesurent les côtés, et notés en abrégé « TP ».

Ainsi $(3, 4, 5)$ est un TP car $3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 = 5^2$.

Partie A : généralités

- Démontrer que, si (x, y, z) est un TP, et p un entier naturel non nul, alors le triplet (px, py, pz) est lui aussi un TP.
- Démontrer que, si (x, y, z) est un TP, alors les entiers naturels x, y et z ne peuvent pas être tous les trois impairs.
- Pour cette question, on admet que tout entier naturel non nul n peut s'écrire d'une façon unique sous la forme du produit d'une puissance de 2 par un entier impair :

$n = 2^\alpha \times k$ où α est un entier naturel (éventuellement nul) et k un entier naturel impair.

L'écriture $n = 2^\alpha \times k$ est nommée *décomposition* de n .

Voici par exemple les *décompositions* des entiers 9 et 120 : $9 = 2^0 \times 9$,

$120 = 2^3 \times 15$.

- Donner la décomposition de l'entier 192.
- Soient x et z deux entiers naturels non nuls, dont les décompositions sont $x = 2^\alpha \times k$ et $z = 2^\beta \times m$.
Écrire la *décomposition* des entiers naturels $2x^2$ et z^2 .
- En examinant l'exposant de 2 dans la *décomposition* de $2x^2$ et dans celle de z^2 , montrer qu'il n'existe pas de couple d'entiers naturels non nuls (x, z) tels que $2x^2 = z^2$.

On admet que la question A - 3. permet d'établir que les trois entiers naturels x, y et z sont deux à deux distincts. Comme de plus les entiers naturels x, y jouent un rôle symétrique, dans la suite, pour tout TP (x, y, z) , les trois entiers naturels x, y et z seront rangés dans l'ordre suivant :

$$x < y < z.$$

Partie B : recherche de triplets pythagoriciens contenant l'entier 2015

- Décomposer en produit de facteurs premiers l'entier 2015 puis, en utilisant le TP donné dans le préambule, déterminer un TP de la forme $(x, y, 2015)$.
- On admet que, pour tout entier naturel n , $(2n+1)^2 + (2n^2 + 2n)^2 = (2n^2 + 2n + 1)^2$.
Déterminer un TP de la forme $(2015, y, z)$.
- En remarquant que $403^2 = 169 \times 961$, déterminer un couple d'entiers naturels non nuls (x, z) tels que : $z^2 - x^2 = 403^2$, avec $x < 403$.
 - En déduire un TP de la forme $(x, 2015, z)$.*