

## EXERCICE 5

5 points

Soit  $(v_n)$  la suite définie par

$$v_1 = \ln(2) \quad \text{et, pour tout entier naturel } n \text{ non nul, } v_{n+1} = \ln(2 - e^{-v_n}).$$

On admet que cette suite est définie pour tout entier naturel  $n$  non nul.

On définit ensuite la suite  $(S_n)$  pour tout entier naturel  $n$  non nul par :

$$S_n = \sum_{k=1}^n v_k = v_1 + v_2 + \dots + v_n.$$

Le but de cet exercice est de déterminer la limite de  $(S_n)$ .

## Partie A – Conjectures à l'aide d'un algorithme

1. Recopier et compléter l'algorithme suivant qui calcule et affiche la valeur de  $S_n$  pour une valeur de  $n$  choisie par l'utilisateur :

Variables :	$n, k$ entiers $S, v$ réels
Initialisation :	Saisir la valeur de $n$ $v$ prend la valeur ... $S$ prend la valeur ...
Traitement :	Pour $k$ variant de ... à ... faire ... prend la valeur ... ... prend la valeur ... Fin Pour
Sortie :	Afficher $S$

2. À l'aide de cet algorithme, on obtient quelques valeurs de  $S_n$ . Les valeurs arrondies au dixième sont données dans le tableau ci-dessous :

$n$	10	100	1 000	10 000	100 000	1 000 000
$S_n$	2,4	4,6	6,9	9,2	11,5	13,8

En expliquant votre démarche, émettre une conjecture quant au comportement de la suite  $(S_n)$ .

## Partie B – Étude d'une suite auxiliaire

Pour tout entier naturel  $n$  non nul, on définit la suite  $(u_n)$  par  $u_n = e^{v_n}$ .

1. Vérifier que  $u_1 = 2$  et que, pour tout entier naturel  $n$  non nul,  $u_{n+1} = 2 - \frac{1}{u_n}$ .
2. Calculer  $u_2, u_3$  et  $u_4$ . Les résultats seront donnés sous forme fractionnaire.
3. Démontrer que, pour tout entier naturel  $n$  non nul,  $u_n = \frac{n+1}{n}$ .

Partie C – Étude de  $(S_n)$ 

1. Pour tout entier naturel  $n$  non nul, exprimer  $v_n$  en fonction de  $u_n$ , puis  $v_n$  en fonction de  $n$ .
2. Vérifier que  $S_3 = \ln(4)$ .
3. Pour tout entier naturel  $n$  non nul, exprimer  $S_n$  en fonction de  $n$ . En déduire la limite de la suite  $(S_n)$ .\*