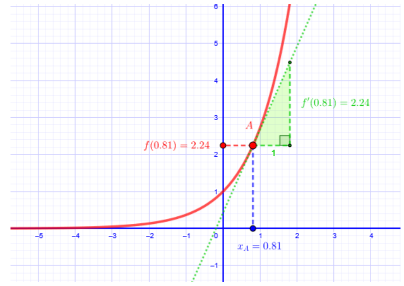
Fonction exponentielle.

Leonhard Euler (1707 ; 1783) *mathématicien suisse, est le premier à chercher des méthodes pour approcher le nombre e.*



I. Définition.

Définition : Il existe une unique fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que .... et .... Cette fonction s'appelle la fonction exponentielle et se note ....

Exemple : ....

....

II. Propriétés algébriques de la fonction exponentielle.

☺ Relation fonctionnelle.

Propriété : Pour tout nombres réels x et y, $exp\ (x + y) = exp\ (x) \times exp\ (y)$.

Démonstration : On considère la fonction h définie sur R par $h(x) = exp(x+y) \times exp(-x)$.
Alors h est dérivable et $h(0) = exp(y)$. ....

....

....

....

Propriété : Pour tout nombres réels x et y, et pour tout entier relatif *n* :

♦ $exp\ (x) \times exp\ (-x) = 1$ ♦ $exp\ (x-y) = \dfrac{exp(x)}{\exp(y)}$ ♦ $exp\ (nx) = [exp\ (x)]^n$

....

....

....

Remarque : $\forall x \in R$, $exp\ (x) \times exp\ (-x) = 1$, *donc la fonction* exp ....

☺ Le nombre *e*.

Définition : L'image de 1 par la fonction exponentielle est notée *e*. On a ainsi exp (… …) = ...

Avec la calculatrice, on peut obtenir une valeur approchée de e. $e \approx$ ....

On a donc, pour tout entier relatif n : $exp\ (n) = exp\ (1 \times n) = [exp\ (1)]^{n} = e^{n}$.

Par extension, on convient de noter pour tout nombre réel x, $\exp\ (x)$ = ...

Avec cette nouvelle notation, les propriétés précédentes s'écrivent :

Propriété : Pour tout nombres réels x et y, et pour tout entier relatif *n* :

$\mathbf{e}^{0}$ = ... $\mathbf{e}^{1}$ = ... $\mathbf{e}^{x+y}$ = ... $\mathbf{e}^{-x}$ = ... $\mathbf{e}^{x-y}$ = ... $\mathbf{e}^{nx}$ = ...

☑*Savoir-faire : Savoir simplifier une écriture avec le nombre e :*

Simplifie les écritures suivantes :

……

……

……

……

……

☺ Lien avec les suites géométriques.

Propriété : pour tout nombre a, la suite (e^{na}) est une suite géométrique de raison e^{a}.

☑*Savoir-faire : Savoir déterminer une suite géométrique comprenant une exponentielle :*

Dans chaque cas, déterminer la raison et le premier terme de la suite géométrique :

a) $u_n = e^{4n}$ b) $u_n = -2e^{-3n}$ c) $u_n = e^{2n-1}$

……

……

……

III. Étude de la fonction exponentielle.

Propriété : La fonction exponentielle est strictement ……………………… sur $\mathbb{R}$, $\forall x \in R$, e^{x} …………

Propriété : La fonction exponentielle est strictement ……………… …… sur $\mathbb{R}$.

…………………………………………

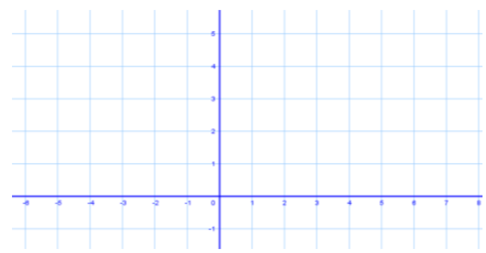
…………………………………………

…………………………………………

…………………………………………

…………………………………………

…………………………………………



……

……

Propriété : Pour tout nombres réels a et b,

- $e^{a} = e^{b} \Leftrightarrow$ ……………………………
- $e^{a} < e^{b} \Leftrightarrow$ ……………………………

☑*Savoir-faire : Savoir résoudre une équation ou une inéquation avec l'exponentielle :*

Résoudre :

……

……

……

……

……

……

……

IV. Étude de fonction avec la fonction exponentielle.

☑*Savoir-faire : Savoir dériver une fonction avec l'exponentielle :*

Dériver les fonctions suivantes : $f(x) = 4x + e^x$ $g(x) = (x-1)e^x$ $h(x) = \frac{e^x}{x}$

………
………
………
………

☑*Savoir-faire : Savoir étudier une fonction avec l'exponentielle :*

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x+1)e^x$.

a) Calculer la dérivée de la fonction f.

………
………

b) Dresser le tableau de variations de la fonction f.

………
………
………
………

c) Déterminer une équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse 0.

………
………

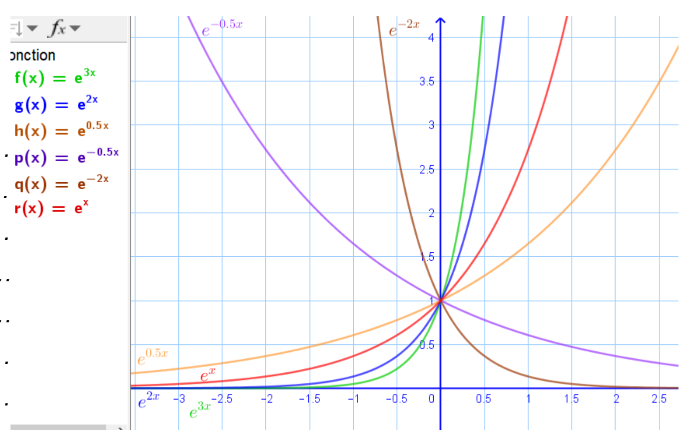
V. Fonctions définies par $f(t) = e^{kt}$, $k \in R$.

Propriété : La fonction f définie par $f(t) = e^{kt}$ est dérivable sur R
et sa dérivée a pour expression ……………………………

………
………
………

Propriété :

- ♦ Si $k > 0$: la fonction $t \to e^{kt}$ est ……………………
- ♦ Si $k > 0$: la fonction $t \to e^{kt}$ est ……………………



……………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………