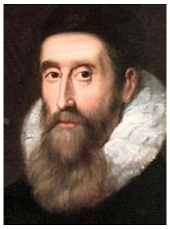
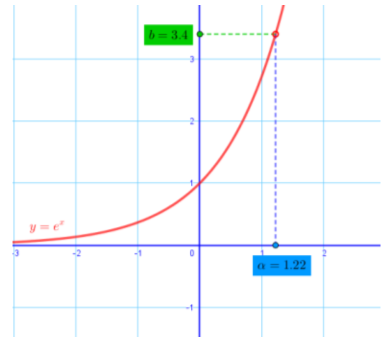


Fonction logarithme népérien.

***John Napier** (1550 ; 1617) mathématicien écossais, connu sous le nom de Jean Neper, publie en 1614 un ouvrage présentant un outil qui permet de simplifier les calculs : le logarithme.*

I. Définition.



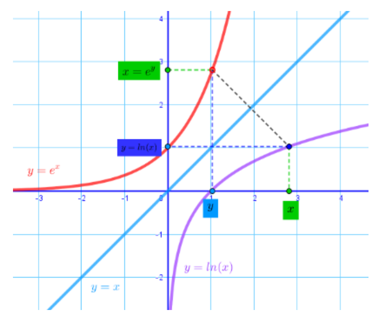
☺ Introduction : Résolution de l'équation (E): $e^x = b$, avec $b > 0$

$\lim\limits_{x \to -\infty} e^x$ = ... et $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x$ =......... donc $b \in$ ....

De plus, la fonction exponentielle est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, (E): $e^x = b$ admet une unique solution α appartenant à $\mathbb{R}$. On note $\alpha = \ln(b)$.

Définition : Soit b un nombre strictement positif
L'équation (E) : $e^x = b$ admet une unique solution. Cette solution se note $ln(b)$ et s'appelle le logarithme népérien de b.
La fonction qui à tout réel $x > 0$ associe $ln(x)$ s'appelle la fonction logarithme népérien et se note ln, est la fonction définie sur $]\,0\,;\,+\infty\,[$ par $ln : x \mapsto ln(x)$.

Remarques :



☺ *L'équation (E) : $e^x = 3$ admet une unique solution. Il s'agit de x = ...*
A l'aide de la calculatrice, on peut obtenir une valeur approchée : $x \approx$ ....

☺ La fonction $ln : x \mapsto ln(x)$ est définie sur ....

☺ Les fonctions exp et ln sont des fonctions réciproques l'une de l'autre.

Propriété : Les courbes représentatives des fonctions exp et ln sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

Propriétés :

☺ Pour $x > 0$: $y = \ln(x) \Leftrightarrow x = e^y$ ☺ $\ln(1) =$ ......; $\ln(e) =$ ......; $\ln\left(\frac{1}{e}\right) =$......

☺ $\ln(e^x) = x$ ☺ Pour $x > 0$: $e^{\ln(x)} = x$.

II. Propriétés de la fonction logarithme népérien.

☺ Relation fonctionnelle.

Théorème : Pour tous réels x et y strictement positifs, on a : $ln(x \times y) = ln(x) + ln(y)$.

....

....

....

....

....

....

☺ Conséquences.

Propriétés : Pour tous réels x et y strictement positifs, on a :
☺ $ln\left(\frac{1}{x}\right) =$ ………… ☺ $ln\left(\frac{x}{y}\right) =$ ………… ☺ $ln\left(\sqrt{x}\right) =$ ………… ☺ $ln(x^n) =$ ………… , avec n entier relatif.

☑ *Savoir-faire : Savoir simplifier une expression contenant des logarithmes :*

Simplifie les expressions suivantes :
☺ $A = \ln\left(3-\sqrt{5}\right) + \ln\left(3+\sqrt{5}\right)$ ☺ $B = 3\ln(2) + \ln(5) - 2\ln(3)$ ☺ $C = \ln(e^2) - \ln\left(\frac{2}{e}\right)$

………
………
………
………
………

☺ Équations.

Propriétés : Pour tous réels x et y strictement positifs, on a :
☺ $\ln(x) = \ln(y) \iff x = y$

☑ *Savoir-faire : Savoir résoudre une équation avec des logarithmes :*

Résoudre dans I les équations suivantes :
☺ $(E_1): \ln(x) = 2,\ \mathrm{I} =]0\,;\,+\infty[$ ☺ $(E_2): e^{x+1} = 5,\ \mathrm{I} = \mathbb{R}$ ☺ $(E_3): 3\ln(x) - 4 = 8,\ \mathrm{I} =]0\,;\,+\infty[$
☺ $(E_4):\ \ln(x-3) + \ln(9-x) = 0,\ \mathrm{I} = \mathbb{R}$

………
………
………
………
………
………
………
………

☑ *Savoir-faire : Savoir résoudre une équation du type $(E): a^x = b$:*

Résoudre les équations : ☺ $(E_1):\ 6^x = 2$ ☺ $(E_2): x^5 = 3$

………
………

Edgar a placé 1000 € sur un compte qui rapporte 10% d'intérêt tous les ans, Au bout de combien de temps aura-t-il doublé son placement ?

………
………
………

III. Étude de la fonction logarithme népérien.

☺ Dérivabilité.

Propriété : La fonction logarithme népérien est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ et $(\ln x)' =$....................

Démonstration exigible :

....
....
....
....

☑ *Savoir-faire : Savoir dériver une fonction avec du ln:*

Soit f la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \frac{(\ln x)^2}{x}$. Détermine l'expression de $f'(x)$.

....
....
....
....

Remarque : La fonction logarithme népérien est concave sur $]0\,;\,+\infty[$.

....

☺ Variations.

Propriété : La fonction logarithme népérien est strictement .... sur $]0\,;\,+\infty[$.

Propriétés : Pour tous réels x et y strictement positifs, on a : $\ln(x) < \ln(y) \iff x < y$

☑ *Savoir-faire : Savoir résoudre une inéquation avec des logarithmes :*

Résoudre dans $\mathbb{I}$ les inéquations suivantes :

☺ (I_1) $\ln(6x-1) \geq 2,\ \ \mathrm{I} = \left]\frac{1}{6}\,;\,+\infty\right[$ ☺ $(I_2): e^x + 5 > 4\,e^x$, $\mathrm{I} = \mathbb{R}$ ☺ $(I_2): \ln(3-x) - \ln(x+1) \leq 0,\ \ \mathrm{I} = \mathbb{R}$

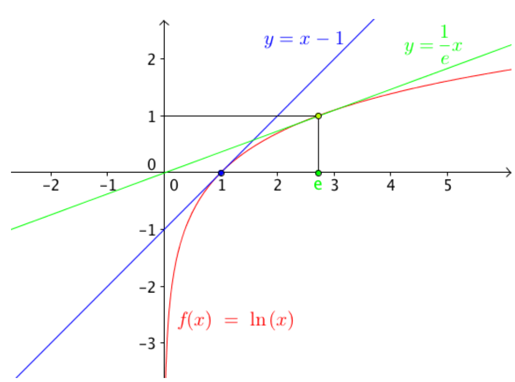
....
....
....
....
....

☺ Limites et tableau de variations.

Propriété : $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to0} \ln(x) = -\infty$

x	
Signes de $ln'(x)$	
Variations de ln	

....
....
....
....
....
....
....



IV. Croissance comparée des fonctions logarithme et puissances.

Propriétés (croissances comparées) :

☺ $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ et pour tout entier non nul n, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = 0$

☺ $\lim\limits_{x\to 0} x\ln(x) = 0$ et pour tout entier n, $\lim\limits_{x\to 0} x^n \ln(x) = 0$

Démonstration exigible :

....

....

....

....

☑ *Savoir-faire : Savoir déterminer une limite par croissance comparée :*

Détermine les limites suivantes : ☺ $\lim\limits_{x\to+\infty} x - \ln x$ ☺ $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x-1}$

....

....

....

....

....

V. Études de fonctions contenant des logarithmes.

Propriété :

Soit u une fonction dérivable sur $\mathbb{I}$ et telle que $\forall x \in I, u(x) > 0$, alors la fonction $ln \circ u$ est dérivable sur $\mathbb{I}$ et on a : $(ln \circ u)' =$

☑ *Savoir-faire : Savoir étudier les variations d'une fonction contenant des logarithmes :*

Soit la fonction f définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = 3 - x + 2\ln(x)$.

Détermine les variations de f et étudie sa convexité .

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....